

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



PARTIÇÕES DE INTEIROS E DUALIDADE EM ESTRUTURAS
COMBINATÓRIAS

Inês Neves Louro Legatheaux Martins

MESTRADO EM MATEMÁTICA
Especialidade: ÁLGEBRA, LÓGICA E FUNDAMENTOS

2007

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



PARTIÇÕES DE INTEIROS E DUALIDADE EM ESTRUTURAS
COMBINATÓRIAS

Inês Neves Louro Legatheaux Martins

Dissertação orientada pela Prof. Doutora Maria Manuel Correia Torres

MESTRADO EM MATEMÁTICA
Especialidade: ÁLGEBRA, LÓGICA E FUNDAMENTOS

2007

Agradecimentos

Agradeço à Professora Maria Manuel Correia Torres por toda a orientação científica e aconselhamento técnico, assim como pela disponibilidade, apoio e entusiasmo que me transmitiu no período de elaboração desta tese.

Ao João, pelas infindáveis horas de espera que suportou com estoicismo, devo um profundo e sentido agradecimento. Pela ternura, pela compreensão, pelo apoio, por te encontrar no fim da caminhada.

Finalmente, agradeço à Edite e ao Zaugusto por me terem suportado com dignidade, respeito e muito, muito carinho.

Resumo

Nos anos oitenta, M. Albertson apresenta um contexto geral para formular problemas de dualidade, considerando hipergrafos e associando-lhes as sucessões das diferenças entre dois termos consecutivos da sucessão das dimensões e da sucessão de estabilidade. Os teoremas de dualidade traduzem-se pela igualdade do primeiro termo de uma das sucessões com o comprimento da outra. Surge naturalmente a questão de saber para que estruturas combinatórias as sucessões das diferenças formam partições e que relação existe entre as duas.

Em 1986, M. Saks observa que os teoremas de dualidade provêm de pares antibloco de hipergrafos, colocando a questão anterior neste contexto.

Esta dissertação pretende mostrar que a linguagem dos hipergrafos permite unificar resultados clássicos e recentes sobre diversas estruturas combinatórias.

Nesse sentido, são apresentados teoremas de C. Greene e D. Kleitman que generalizam os teoremas duais de Dilworth e Mirsky sobre conjuntos parcialmente ordenados. Verifica-se que esta generalização é consequência das sucessões das diferenças associadas ao par antibloco dos hipergrafos das antcadeias e cadeias serem partições conjugadas.

O estudo do par antibloco dos hipergrafos dos emparelhamentos e estrelas de um multigrafo bipartido permite reencontrar um resultado de D. de Werra que estabelece que a sucessão das diferenças dos emparelhamentos forma uma partição da cardinalidade do conjunto de arestas. Segundo M. Saks, permite ainda determinar a relação entre esta partição e a sucessão das diferenças das estrelas.

Por último, é verificado que a partição característica de um matróide, noção desenvolvida por J. A. Dias da Silva em 1990, pode ser encarada como sucessão das diferenças das dimensões de um hipergrafo. Embora a tradução do problema de dualidade enquanto par antibloco nem sempre seja possível para esta estrutura, apresenta-se uma classe particular de matróides para os quais existe um par antibloco de hipergrafos cujas sucessões das diferenças são partições conjugadas.

Palavras-chave

Pares antibloco de hipergrafos; colorações de matróides; colorações de arestas em multigrafos bipartidos; cadeias e anticadeias de um conjunto parcialmente ordenado; partições de inteiros não negativos.

Abstract

In the eighties, M. Albertson defines a general context for duality questions by taking hypergraphs and considering the difference sequences of their rank sequence and their stability sequence. Duality theorems arise if the first term of one of these sequences equals the length of the other. It is natural to ask for which combinatorial structures these difference sequences are integer partitions and what relationship may hold between them.

M. Saks noted that duality theorems arise from antiblocking pairs of hypergraphs, stating the previous question in this context.

The present thesis aims to unify some classical and recent results about several combinatorial structures through the language of hypergraphs.

For partially ordered sets, theorems by C. Greene and D. Kleitman that extend the Dilworth's decomposition theorem and its dual are presented. The extension is a consequence of a conjugacy relationship between the difference sequences associated with the antiblocking pair of the hypergraphs of antichains and chains.

The study of the antiblocking pair of the matching and star hypergraphs of a bipartite multigraph enables to see the matching difference sequence as a partition of the cardinality of the edge set, translating a result established by D. de Werra. According to M. Saks, it also allows to determine the relationship between the latter partition and the star difference sequence.

Finally, the previous procedures are used to verify that the rank partition of a matroid, notion established by J. A. Dias da Silva in 1990, may be considered as a difference sequence associated with a certain hypergraph. Although the translation of the duality problem as an antiblocking pair is not always possible for this structure, a particular class of matroids is presented for which there exists an antiblocking pair of hypergraphs whose difference sequences are conjugate partitions.

Keywords

Antiblocking pairs of hypergraphs; matroid colorings; edge colorings for bipartite multigraphs; chains and antichains in partially ordered sets; non negative integer partitions.

Índice

Prefácio	ix
1 Introdução	1
1.1 Sobre conjuntos parcialmente ordenados e reticulados	1
1.2 Breves referências à teoria dos grafos	5
1.3 Partições de inteiros não negativos	7
1.4 Propriedades de sucessões inteiras	10
2 Partições associadas a conjuntos parcialmente ordenados	19
2.1 Introdução	19
2.2 O reticulado das k -famílias	27
2.3 \mathcal{C} -partições k -saturadas	43
2.4 Problema dual	52
3 Partições e colorações de matróides	59
3.1 Generalidades sobre matróides	59
3.2 Motivação e principais resultados	65
3.3 A partição característica de um matróide	68
3.4 A partição de profundidade de um matróide	74
4 A partição de emparelhamento e a composição de estrelas de um multigrafo bipartido	87
4.1 Motivação e resultados fundamentais	87
4.2 A partição de emparelhamento e a composição de estrelas de um multigrafo bipartido	92
5 Sucessões e dualidade: um contexto geral	103
5.1 Sobre pares antibloco de hipergrafos	104
5.2 Parâmetros associados a hipergrafos	112
5.3 Sucessões e dualidade	115
5.4 O par antibloco dos hipergrafos das cliques e dos independentes de um grafo	128

5.5	Matróides, famílias saturadas e pares antibloco de hipergrafos . .	135
-----	--	-----

Bibliografia		145
---------------------	--	------------

Prefácio

Entre os resultados mais elegantes da Combinatória, encontram-se os teoremas de dualidade. Estes caracterizam-se por estabelecer que o máximo de uma certa quantidade sobre um conjunto de objectos combinatórios é igual ao mínimo de outra quantidade sobre um conjunto de objectos associado.

Incluem-se nesta família o conhecido teorema sobre a cardinalidade máxima de um emparelhamento num multigrafo bipartido de König, Hall e Egervary [19] e o teorema de Dilworth [13] sobre a cardinalidade máxima de uma anticadeia num conjunto parcialmente ordenado finito.

Em ambos os casos, invertendo o papel dos objectos envolvidos com o dos duais (emparelhamento-estrela, anticadeia-cadeia), obtemos um novo resultado de dualidade que consiste, respectivamente, no teorema sobre o número mínimo de emparelhamentos necessários para cobrir a família de arestas de um multigrafo bipartido de König [19] e no teorema sobre o número mínimo de anticadeias necessárias para cobrir um conjunto parcialmente ordenado de Mirsky [23].

Os conceitos de emparelhamento e estrela num multigrafo bipartido podem ser generalizados através das noções de k -emparelhamento e k -estrela, dando origem a problemas de colorações de arestas abordados por J. Folkman e D. R. Fulkerson [15] e D. de Werra [28] nos anos setenta.

Neste âmbito, D. de Werra [28] demonstra que a sucessão das cardinalidades dos k -emparelhamentos máximos de um multigrafo bipartido é côncava, dando origem a uma partição da cardinalidade da família de arestas que é denominada de partição de emparelhamento. Em geral, a sucessão das cardinalidades das k -estrelas máximas não é côncava mas, como observa M. Albertson [2] e demonstra M. Saks [25], existe uma relação entre a conjugada da partição de emparelhamento e a sucessão das diferenças entre dois termos consecutivos da sucessão das cardinalidades das k -estrelas máximas.

Ainda nos anos setenta, C. Greene e D. Kleitman [16] generalizam o teorema de Dilworth mediante a definição de k -famílias em conjuntos parcialmente or-

denados, determinando em seguida que a sucessão das cardinalidades máximas das k -famílias é côncava.

Num segundo artigo, C. Greene [17] introduz a noção de k -cofamília num conjunto parcialmente ordenado e prova que a sucessão das cardinalidades máximas das k -cofamílias também é côncava e que a respectiva partição das diferenças é conjugada da partição das diferenças das cardinalidades máximas das k -famílias.

Em 1990, partindo da noção de conjunto k -independente num matróide sobre um conjunto finito, J. A. Dias da Silva [9] constrói a partição característica, partição que se revela fundamental para a classificação das colorações de um matróide assim como para a resolução de diversos problemas no âmbito da Álgebra Multilinear.

Em 1995, J. A. Dias da Silva e A. Fonseca [10] caracterizam a conjugada da partição característica, introduzindo a noção de s -profundidade de um matróide.

As semelhanças apontadas entre as partições referidas sugerem que possa existir um contexto geral para formular este tipo de problemas de dualidade. Em 1986, M. Saks [25] define um conjunto de parâmetros associados à estrutura de hipergrafo que permitem trabalhar conceitos duais em termos da linguagem dos hipergrafos.

Nesta dissertação, analisamos os diversos ambientes associados aos teoremas de dualidade atrás referidos e mostramos, seguindo o já citado artigo de M. Saks [25], como se podem abordar estes conceitos do ponto de vista dos hipergrafos e, em particular, dos pares antibloco de hipergrafos.

Sendo o artigo [25] anterior à definição de partição característica de um matróide [9], a abordagem anterior é aplicada a esta estrutura, num trabalho original que permite entender os conceitos envolvidos em [9] e [10] de uma perspectiva diferente.

No primeiro capítulo, começamos por introduzir definições e resultados bem conhecidos acerca de conjuntos parcialmente ordenados, reticulados e grafos. Pelo papel transversal que assumem ao longo deste trabalho, apresentamos na segunda secção algumas noções básicas sobre partições de inteiros não negativos. Seguidamente, centramos a nossa atenção sobre sucessões de inteiros, apontando propriedades aritméticas e generalizando a noção de partição conjugada para sucessões que não são partições.

O segundo capítulo é inteiramente dedicado aos resultados de C. Greene e D. Kleitman [16, 17] que generalizam os teoremas de Dilworth e Mirsky sobre conjuntos parcialmente ordenados.

No terceiro capítulo, incluímos uma breve resenha de conceitos associados a matróides, seguida de uma apresentação dos principais resultados do capítulo enquadrada pela discussão de problemas de colorações. Na terceira secção, ex-

comos o trabalho de J. A. Dias da Silva [9] que conduz à definição da partição característica de um matróide. Na última secção, apresentamos resultados referentes a transversais que se revelam necessários para a construção da partição de profundidade de um matróide. Terminamos com um teorema fundamental da autoria de J. A. Dias da Silva e A. Fonseca [10] que estabelece uma relação entre esta partição e a partição característica de um matróide.

No quarto capítulo, será feita alusão à teoria dos grafos. Em particular, demonstramos resultados conduzentes à definição de partição de emparelhamento de um multigrafo bipartido, noção fundamental para a classificação de colorações de arestas nesta estrutura. Encerramos o capítulo com uma discussão acerca da relação entre esta partição e a sucessão que lhe corresponde para k -estrelas máximas.

No quinto capítulo, tendo por base as propriedades aritméticas de sucessões inteiras estabelecidas no primeiro capítulo, definimos um conjunto de ferramentas gerais para o estudo das relações entre as diversas sucessões que se podem associar a um hipergrafo e, em particular, a um par antibloco de hipergrafos. Discutimos os resultados de dualidade que estas relações traduzem e fornecemos critérios para determinar que propriedades são verificadas por um hipergrafo, reencontrando resultados expostos em capítulos anteriores acerca de conjuntos parcialmente ordenados e multigrafos bipartidos. Na última secção do capítulo, aplicamos a abordagem anterior a matróides, verificando que a partição característica corresponde a uma destas sucessões para um determinado hipergrafo. Terminamos com a apresentação de uma classe particular de matróides, para a qual a tradução de problemas de dualidade enquanto par antibloco de hipergrafos é particularmente clara.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Sobre conjuntos parcialmente ordenados e reticulados

Nesta secção, estão presentes definições e resultados bem conhecidos acerca de conjuntos parcialmente ordenados e reticulados, que se revelam importantes no desenvolvimento deste trabalho.

Salvo indicação em contrário, as demonstrações dos resultados apresentados podem ser encontradas em [6].

Seja P um conjunto não vazio. Se está definida uma relação de ordem parcial \leq_P em P , dizemos que (P, \leq_P) é um *conjunto parcialmente ordenado*. Caso não exista ambiguidade, representamos \leq_P por \leq e o par (P, \leq) por P .

No que segue, P designa um conjunto parcialmente ordenado. Se S for um subconjunto não vazio de P , consideramos definida em S a ordem induzida pela ordem de P .

Dados elementos x e y em P , dizemos que x e y são *comparáveis* se

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

Caso contrário, dizemos que x e y *não são comparáveis*. Utilizamos ainda as convenções habituais relativas a desigualdades. Por exemplo, $x < y$ significa que $x \leq y$ e $x \neq y$.

Uma *anticadeia* de P é um subconjunto de P cujos elementos não são comparáveis dois a dois. Dualmente, uma *cadeia* de P é um subconjunto de P cujos elementos são comparáveis dois a dois.

Se existe em P um elemento m que satisfaz $m \geq x$ para todo o $x \in P$, dizemos que m é o *máximo* de P . Se existe em P um elemento m' que satisfaz $m' \leq x$ para todo o $x \in P$, dizemos que m' é o *mínimo* de P .

Um elemento $a \in P$ diz-se um *elemento maximal* de P se não existe em P nenhum elemento comparável com a e maior do que a , isto é,

$$\text{se } x \in P \text{ e } x \geq a, \text{ então } x = a.$$

Analogamente, um elemento $b \in P$ diz-se um *elemento minimal* de P se não existe em P nenhum elemento comparável com b e menor do que b , isto é,

$$\text{se } x \in P \text{ e } x \leq b, \text{ então } x = b.$$

Das definições anteriores, é claro que se P admite um elemento máximo m , então m é o único elemento maximal de P . Do mesmo modo, se P admite um elemento mínimo m' , então m' é o único elemento minimal de P .

Seja S um subconjunto de P . Dizemos que S *tem supremo* se o conjunto $\{c \in P : x \leq c, \forall x \in S\}$ admite um mínimo u . O elemento u designa-se por *supremo* de S e denota-se $\sup S$. Analogamente, dizemos que S *tem ínfimo* se o conjunto $\{d \in P : d \leq x, \forall x \in S\}$ admite um máximo v . O elemento v designa-se por *ínfimo* de S e denota-se $\inf S$.

No que se segue, consideramos certos operadores em conjuntos parcialmente ordenados cujas propriedades se revelam de grande utilidade.

Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Um *operador de fecho* em P é uma aplicação $\varphi : P \rightarrow P$ que satisfaz, para quaisquer $x, y \in P$,

- (i) $x \leq \varphi(x)$;
- (ii) Se $x \leq y$, então $\varphi(x) \leq \varphi(y)$;
- (iii) $\varphi(\varphi(x)) = \varphi^2(x) = \varphi(x)$.

Analogamente, um *anti-operador de fecho* em P é uma aplicação $\varphi : P \rightarrow P$ que satisfaz, para quaisquer $x, y \in P$,

- (i) $x \geq \varphi(x)$;
- (ii) Se $x \leq y$, então $\varphi(x) \leq \varphi(y)$;
- (iii) $\varphi(\varphi(x)) = \varphi^2(x) = \varphi(x)$.

Se $\varphi : P \rightarrow P$ for um operador de fecho, os elementos de P que pertencem à imagem de φ são denominados de *elementos fechados*, isto é, $x \in P$ é um elemento fechado se e só se $\varphi(x) = x$. Não é difícil verificar que, para todo $x \in P$, $\varphi(x)$ é o menor elemento fechado maior ou igual do que x .

O conceito de elemento fechado define-se de igual modo no caso de um anti-operador de fecho φ em P . Analogamente se verifica que, para cada $x \in P$, $\varphi(x)$ é o maior elemento fechado menor ou igual do que x .

Introduzimos ainda a noção de operador de Galois num conjunto parcialmente ordenado, noção estabelecida por M. Saks em [25].

Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Um *operador de Galois* em P é uma aplicação $\phi : P \rightarrow P$ satisfazendo, para quaisquer $x, y \in P$,

(i) se $x \leq y$, então $\phi(x) \geq \phi(y)$;

(ii) $\phi(\phi(x)) = \phi^2(x) \geq x$.

Um dos interesses da noção de operador de Galois reside no facto que enunciámos em seguida e que se encontra em [25].

Proposição 1.1 [25] *Seja P um conjunto parcialmente ordenado e seja ϕ um operador de Galois em P . Então $\phi^2 : P \rightarrow P$ é um operador de fecho cujos elementos fechados são os elementos de P que pertencem à imagem de ϕ .*

O restante da secção incide sobre reticulados, estrutura que assume particular importância no segundo capítulo deste trabalho.

Um conjunto parcialmente ordenado P diz-se um *reticulado* se o conjunto $\{x, y\}$ tem supremo e ínfimo em P para quaisquer $x, y \in P$.

Se P for um reticulado, podemos definir operações binárias \vee_P e \wedge_P em P ,

$$x \vee_P y = \sup\{x, y\}, \quad \forall x, y \in P,$$

$$x \wedge_P y = \inf\{x, y\}, \quad \forall x, y \in P.$$

Ao longo deste trabalho, utilizaremos livremente as noções de supremo e ínfimo num reticulado e as operações binárias correspondentes.

Seja S um subconjunto não vazio de P . Dizemos que S é um *subreticulado* de P se

$$\sup\{x, y\}, \inf\{x, y\} \in S, \quad \forall x, y \in S,$$

onde \sup e \inf representam, respectivamente, o supremo e o ínfimo em P .

Se S for um subconjunto não vazio de P , é claro das observações anteriores que S é um subreticulado de P se e só se S for fechado para as operações binárias \vee_P e \wedge_P . Nessa situação, S também é um reticulado.

Um reticulado P é *limitado* se admitir máximo e mínimo enquanto conjunto parcialmente ordenado. Não é difícil provar que um reticulado finito é limitado.

Observemos ainda que se S for um subconjunto não vazio do reticulado limitado P , então S é subreticulado de P se e só se S admitir mínimo e, para quaisquer $x, y \in S$, $\sup \{x, y\} \in S$, onde \sup representa o supremo em P .

É possível dois reticulados apresentarem estruturas em tudo idênticas, excepto pela natureza dos seus elementos. Esta situação pode ser traduzida através do conceito de isomorfismo.

Sejam P e Q conjuntos parcialmente ordenados e φ uma aplicação de P em Q . Dizemos que φ *preserva a ordem* se, para quaisquer $x, y \in P$,

$$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Se $\varphi : P \rightarrow Q$ for uma aplicação que preserve a ordem, dizemos que φ é um *mergulho de ordem* se, para quaisquer $x, y \in P$,

$$x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Se, além disso, φ for uma aplicação sobrejectiva, φ diz-se um *isomorfismo de ordem*. Nesse caso, a aplicação inversa φ^{-1} também é um isomorfismo de ordem.

Seja P um reticulado e seja Q um conjunto parcialmente ordenado. Se $\varphi : P \rightarrow Q$ for um isomorfismo de ordem, não é difícil provar que Q é um reticulado com operações de supremo e ínfimo definidas por

$$\varphi(x) \vee_Q \varphi(y) = \varphi(x \vee_P y), \quad \forall x, y \in P,$$

$$\varphi(x) \wedge_Q \varphi(y) = \varphi(x \wedge_P y), \quad \forall x, y \in P.$$

No caso particular de $\varphi : P \rightarrow P$ ser um operador de fecho ou um anti-operador de fecho no reticulado P , é sobejamente conhecido que o conjunto dos elementos fechados de P forma um reticulado.

Terminamos com um reticulado que terá um papel determinante no próximo capítulo. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Designamos por *ideal de ordem* de P um subconjunto I de P com a seguinte propriedade

$$\text{se } x \in I \text{ e } y \leq x, \text{ então } y \in I.$$

Munido da relação de inclusão, o conjunto dos ideais de ordem de P é um conjunto parcialmente ordenado. Atendendo ao facto de ser fechado para a união e intersecção, é igualmente um reticulado, que denotamos por $\mathcal{I}(P)$.

1.2 Breves referências à teoria dos grafos

No intuito de clarificar a terminologia associada a estes objectos combinatorios, apresentamos aqui algumas noções básicas de teoria de grafos.

Ao longo da secção, seguimos [3] e [19].

Um *multigrafo* é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito cujos elementos são designados por *vértices* e E é uma família de conjuntos formados por dois vértices. Os elementos de E são denominados de *arestas* ou *setas*. Consideramos a família das arestas indexada pelo conjunto $\{1, \dots, m\}$.

Notemos que um multigrafo pode ter arestas *múltiplas*, isto é, um conjunto de dois vértices pode ocorrer mais do que uma vez na família das arestas.

Por outro lado, é de referir que estamos a considerar multigrafos que não admitem *lacetes*, ou seja, que não admitem arestas da forma $\{v, v\}$. Nesse sentido, toda a aresta é um conjunto formado por dois vértices distintos.

É possível descrever geometricamente um multigrafo através de um diagrama, no qual os vértices são representados por pontos e as arestas por linhas que unem os respectivos vértices.

No que se segue, $G = (V, E)$ representa um multigrafo.

Dizemos que duas arestas de G são *adjacentes* se tiverem pelo menos um vértice em comum. Duas arestas não adjacentes dizem-se *independentes*.

Se $\xi = \{u, v\}$ for uma aresta de G , definimos a *multiplicidade* de ξ como sendo o número de vezes que o conjunto $\{u, v\}$ ocorre em E . Denotamos a multiplicidade de ξ por $m_G(\xi)$ ou, se não existir ambiguidade, por $m(\xi)$.

É agora evidente que uma aresta múltipla é uma aresta de multiplicidade superior a 1. Chamamos *grafo* a um multigrafo sem arestas múltiplas. Num grafo, a família de arestas constitui um subconjunto de m elementos de $V \times V$, onde V é o conjunto dos vértices do grafo.

Se $\xi = \{u, v\}$ for uma aresta do multigrafo G , dizemos que ξ *incide* nos vértices u e v . Nesta situação, também dizemos que u e v são vértices *adjacentes*.

Se S for um subconjunto de vértices de G , representamos a família de arestas incidentes num vértice de S e noutra de $V \setminus S$ por $\nabla_G(S)$ ou $\nabla(S)$. Se $S = \{v\}$, onde v é um vértice de G , representamos $\nabla_G(S)$ por $\nabla_G(v)$ ou $\nabla(v)$.

O *grau* de $v \in V$ designa o número de arestas que incidem no vértice v , sendo denotado por $d_G(v)$ ou, abreviadamente, $d(v)$. Um vértice diz-se *isolado*

se tiver grau igual a zero. Definimos $\Delta(G)$ como o *grau máximo* de G , isto é,

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V\}.$$

Seja S um subconjunto de vértices de G . $\Gamma_G(S)$ ou, caso não exista ambiguidade, $\Gamma(S)$, denota o conjunto de vértices de G que são adjacentes a pelo menos um vértice de S . Atendendo à definição, é possível ter $S \not\subseteq \Gamma_G(S)$.

Exemplo 1.2 Seja G o multigrafo

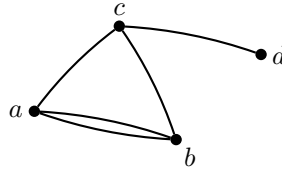


Figura 1.1: Multigrafo G

Se $S = \{a, d\}$, então $\Gamma_G(S) = \{b, c\}$. É óbvio que $S \not\subseteq \Gamma_G(S)$.

Seja S um subconjunto de vértices de G . Chamamos *subgrafo de G induzido por S* ao multigrafo

$$G_S = (S, E(S)),$$

onde $E(S)$ representa a subfamília de E constituída pelas arestas incidentes em vértices de S .

Seja F uma subfamília não vazia de arestas de G . Definimos o *multigrafo parcial de G gerado por F* como sendo o multigrafo

$$G(F) = (V(F), F),$$

onde $V(F)$ denota o subconjunto de V cujos vértices pertencem a pelo menos uma aresta de F .

Dizemos que $G = (V, E)$ é um *grafo completo* se, para cada $u, v \in V$, existe uma aresta de G que incide nos vértices u e v . O grafo completo com n vértices é representado por K_n .

Terminamos com algumas noções importantes que dizem respeito a grafos.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $W \subseteq V$ é uma *clique* de G se o subgrafo induzido por W é completo, isto é, se W é tal que

$$\{x, y\} \in E, \forall x, y \in W.$$

Dualmente, dizemos que $W \subseteq V$ é um conjunto *independente* em G se a intersecção de W com cada clique de G tem no máximo um elemento, isto é, se

$$\{x, y\} \notin E, \forall x, y \in W.$$

Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos o grafo *complementar* de G como sendo o grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, onde $\overline{E} = (V \times V) \setminus E$, isto é,

$$\overline{E} = \{\{x, y\} \in V \times V : \{x, y\} \notin E, x \neq y\}.$$

Seja $G = (V, E)$ um grafo e W um subconjunto de vértices de G . Da definição anterior, é evidente que W é uma clique de G se e só se W é um conjunto independente em \overline{G} . Do mesmo modo, W é um conjunto independente em G se e só se é uma clique de \overline{G} .

1.3 Partições de inteiros não negativos

Pelo papel fundamental que assumem no desenvolvimento deste trabalho, expomos nesta secção alguns resultados bem conhecidos sobre partições de inteiros não negativos.

As partições surgem associadas a conjuntos parcialmente ordenados e são centrais na classificação de colorações de matróides assim como na classificação de colorações de arestas de grafos bipartidos.

Os resultados apresentados podem ser encontrados em [22] e [21].

Definição 1.3 Uma *partição* é uma sucessão finita de inteiros não negativos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, satisfazendo

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0.$$

Se $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$, λ diz-se uma *partição de n* , o que se representa por $\lambda \vdash n$.

No que se segue, introduzimos alguma terminologia associada ao conceito de partição. Ao longo da secção, n representa um inteiro não negativo.

Se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ for uma partição de n , os inteiros $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ constituem os *termos* da partição. Os termos não nulos são designados por *partes*. O *comprimento* de λ é igual ao seu número de partes e representa-se por $l(\lambda)$.

Consideramos que λ e γ representam a mesma partição se forem partições do mesmo inteiro e apresentarem comprimentos iguais. Nesse sentido, $(5, 1)$, $(5, 1, 0, 0)$ e $(5, 1, 0, 0, 0, 0)$ constituem a mesma partição de 6.

Observamos portanto que é possível representar todas as partições de n enquanto sucessões de r termos, com $r \geq n$, completando a sucessão de termos não nulos de cada partição por uma fila de zeros.

A cada partição de n , $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tal que $l(\lambda) = r$, podemos associar o seguinte subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\{(i, j_i) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j_i \leq \lambda_i\}.$$

Este conjunto designa-se por *diagrama de Young associado a λ* e denota-se $[\lambda]$.

O diagrama de Young associado à partição λ pode ser representado geometricamente através de uma figura constituída por n quadrados dispostos em r linhas, contendo a i -ésima linha exactamente λ_i quadrados. Todas as linhas têm início na mesma coluna e os λ_i quadrados da i -ésima linha dispõem-se, convencionalmente e por analogia à indexação de matrizes, da esquerda para a direita. Designamos os elementos de $[\lambda]$ por *caixas* ou *nodos*.

Por exemplo, se $n = 10$ e $\lambda = (5, 4, 1)$, o diagrama de Young associado a λ é dado por

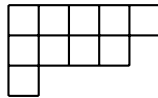


Figura 1.2: Diagrama de Young de $\lambda=(5,4,1)$

Considerando o diagrama de Young associado à partição λ , definimos a *linha u* de $[\lambda]$ como sendo o subconjunto de $[\lambda]$ formado pelos pares cuja primeira coordenada é igual a u . Definimos a *coluna v* de $[\lambda]$ como sendo o subconjunto de $[\lambda]$ constituído pelos pares cuja segunda coordenada é igual a v .

Retomando o exemplo anterior, observamos que a segunda linha de $[(5, 4, 1)]$ é constituída pelos nodos de coordenadas $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ e $(2, 4)$, enquanto que a quarta coluna é constituída pelos nodos de coordenadas $(1, 4)$ e $(2, 4)$.

Dada uma partição λ de n , podemos considerar a sucessão das cardinalidades das colunas de $[\lambda]$. Observando o diagrama de Young de λ , é evidente que obtemos uma nova partição de n que designamos por *partição conjugada* de λ .

Formalmente, definimos a partição conjugada de λ como sendo a sucessão $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{\lambda_1})$ tal que, para cada $1 \leq j \leq \lambda_1$,

$$\lambda'_j = |\{i : \lambda_i \geq j\}|.$$

Como observámos anteriormente, a sucessão λ' é ainda uma partição de n , cujo diagrama de Young se obtém a partir de $[\lambda]$ transpondo as linhas com as colunas, ou seja, para cada $j = 1, \dots, \lambda_1$, λ'_j é o número de quadrados que ocorre na coluna j de $[\lambda]$. Claramente, $(\lambda')' = \lambda$ e portanto $l(\lambda) = \lambda'_1$ e $l(\lambda') = \lambda_1$.

Se $\lambda = (5, 4, 1)$, então $\lambda' = (3, 2, 2, 2, 1)$ e o diagrama de Young associado a λ' é dado por

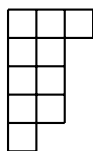


Figura 1.3: Diagrama de Young de $\lambda=(3,2,2,2,1)$

Sendo as partições sucessões decrescentes de inteiros, a ideia de definir uma relação de ordem componente a componente aparece de forma natural. No entanto, a relação de majoração que apresentamos em seguida revela-se muito mais rica, estando na génese de resultados de áreas da Combinatória tão diversas como a teoria de grafos ou o estudo de matrizes de incidência.

Para uma discussão aprofundada acerca das origens da relação de majoração e suas aplicações, sugerimos a obra de A. W. Marshall e I. Olkin [21].

Definição 1.4 Se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ forem partições de n , dizemos que λ *majora* γ , se as seguintes desigualdades forem satisfeitas

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \geq \sum_{j=1}^p \gamma_j, \quad p = 1, \dots, n.$$

Se λ majora γ , escrevemos $\lambda \succeq \gamma$, tendo-se, em particular,

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \gamma_1 + \dots + \gamma_n = n \quad \text{e} \quad l(\lambda) \leq l(\gamma).$$

Não é difícil verificar que a relação de majoração constitui uma ordem parcial entre partições do mesmo inteiro não negativo. Representamos o conjunto das partições de n parcialmente ordenado pela relação de majoração por P_n , tratando-se claramente de um conjunto finito.

1.4 Propriedades de sucessões inteiras

Nesta secção, consideramos sucessões inteiras e estudamos as suas propriedades de um ponto de vista aritmético. Neste âmbito, definimos um operador de Galois num conjunto parcialmente ordenado de sucessões inteiras que permite generalizar a noção de partição conjugada para sucessões que não são partições.

A descrição deste operador deve-se a M. Saks [25]. Contudo, os resultados apresentados também podem ser encontrados em [7].

Ao longo da secção, n representa um inteiro não negativo.

Seja D_n o conjunto das sucessões inteiras $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}$ satisfazendo

- (i) $a_0 = 0$;
- (ii) $a_k \leq a_{k+1}$, para qualquer $k \geq 0$;
- (iii) $a_k \leq n$, para qualquer $k \geq 0$;
- (iii) $a_k = n$, para algum k .

Seja $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in D_n$. Chamamos *índice terminal* de \underline{a} ao menor k tal que $a_k = n$. Se t for o índice terminal de \underline{a} , é imediato da definição que $a_j = n$, para todo o $j \geq t$.

Se $n = 7$, $\underline{a} = (0, 2, 5, 6, 7, 7, \dots) \in D_7$. O índice terminal de \underline{a} é $t = 4$.

O conjunto D_n pode ser munido da estrutura de conjunto parcialmente ordenado. Com efeito, se $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}, \underline{b} = (b_k)_{k \geq 0} \in D_n$, estabelecemos que

$$\underline{a} \leq_D \underline{b} \text{ se e só se } a_k \leq b_k, \text{ para qualquer } k \geq 0.$$

Não é difícil verificar que \leq_D é uma relação de ordem parcial em D_n . É de notar que a sucessão $(0, n, n, \dots)$ é o máximo de D_n , sendo denotada por 1_n .

Na verdade, o conjunto parcialmente ordenado D_n determina um reticulado com operações de supremo e ínfimo definidas por, para quaisquer $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}, \underline{b} = (b_k)_{k \geq 0} \in D_n$,

$$\underline{a} \vee_D \underline{b} = (\max\{a_k, b_k\})_{k \geq 0},$$

$$\underline{a} \wedge_D \underline{b} = (\min\{a_k, b_k\})_{k \geq 0}.$$

No que se segue, identificamos o reticulado (D_n, \leq_D) por D_n .

Introduzimos agora um conceito que generaliza a noção de partição de um inteiro não negativo.

Uma *composição* de um inteiro não negativo n é uma sucessão $\underline{\lambda} = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ de inteiros não negativos cuja soma é igual a n .

Como referimos na secção anterior, uma partição de n pode ser representada por uma sucessão de r termos, com $r \geq n$. Nesse sentido, é ainda pertinente representar uma partição de n por uma sucessão infinita de inteiros não negativos, completando a sucessão de termos não nulos por uma fila de zeros.

Com esta assumption, é claro que uma partição $\underline{\lambda} = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ de n é uma composição de n satisfazendo

$$\lambda_k \geq \lambda_{k+1}, \quad \text{para qualquer } k \geq 1. \quad (1.1)$$

Nesta secção, consideramos que as partições são composições que satisfazem a condição (1.1). No entanto, ao longo deste trabalho, utilizaremos livremente as duas representações referidas.

Atendendo à definição, toda a composição admite um número finito de termos não nulos. Nesse sentido, podemos considerar a ordem de majoração entre composições do mesmo inteiro não negativo.

Se $\underline{\lambda} = (\lambda_k)_{k \geq 1}$ e $\underline{\gamma} = (\gamma_k)_{k \geq 1}$ forem composições de n , dizemos que $\underline{\lambda}$ *majora* $\underline{\gamma}$, o que denotamos por $\underline{\lambda} \geq_C \underline{\gamma}$, se as seguintes desigualdades forem satisfeitas

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \geq \sum_{j=1}^k \gamma_j, \quad \text{para qualquer } k \geq 1.$$

Denotamos o conjunto das composições de n ordenado por majoração por C_n . Pelo que referimos anteriormente, P_n é um subconjunto finito de C_n .

Seja $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in D_n$. Definimos a *sucessão diferença* de \underline{a} , que representamos por $\Delta \underline{a}$, como sendo a sucessão de inteiros

$$\Delta \underline{a} = (a_k - a_{k-1})_{k \geq 1}.$$

Não é difícil verificar que $\Delta \underline{a} \in C_n$, $\forall \underline{a} \in D_n$. Com efeito, se $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}$ for uma sucessão de D_n , como $a_k \leq a_{k+1}$, para todo o $k \geq 0$, então $\Delta \underline{a}$ é uma sucessão de inteiros não negativos. Se t for o índice terminal da sucessão \underline{a} , temos $a_k = n$, $\forall k \geq t$. Logo,

$$\sum_{k \geq 1} a_k - a_{k-1} = a_1 - a_0 + \dots + a_t - a_{t-1} + n - n + \dots = a_t - a_0 = n.$$

A noção de sucessão diferença permite definir uma aplicação de D_n em C_n com propriedades muito interessantes.

Proposição 1.5 *Seja n um inteiro não negativo. A aplicação $\Delta : D_n \rightarrow C_n$ definida por $\Delta \underline{a} = (a_k - a_{k-1})_{k \geq 1}$ é um isomorfismo de ordem entre D_n e C_n . Então, em particular, C_n é um reticulado.*

Demonstração.

Sejam $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}$, $\underline{b} = (b_k)_{k \geq 0} \in D_n$. Então,

$$\begin{aligned} \underline{a} \leq_D \underline{b} &\Leftrightarrow a_k \leq b_k, \quad \forall k \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k a_j - a_{j-1} = a_k \leq b_k = \sum_{j=1}^k b_j - b_{j-1}, \quad \forall k \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k (\Delta \underline{a})_j \leq \sum_{j=1}^k (\Delta \underline{b})_j, \quad \forall k \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \Delta \underline{a} \leq_C \Delta \underline{b}. \end{aligned}$$

A aplicação $\Delta : D_n \rightarrow C_n$ é um mergulho de ordem entre D_n e C_n .

Seja $\underline{\lambda} = (\lambda_k)_{k \geq 1} \in C_n$ e consideremos a sucessão $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}$ definida por

$$a_0 = 0 \text{ e } a_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j, \text{ se } k \geq 1.$$

Sendo os termos de $\underline{\lambda}$ inteiros não negativos, é óbvio que $a_k \leq a_{k+1}$, para qualquer $k \geq 0$. Por outro lado, sabemos que $\underline{\lambda}$ admite um número finito de termos não nulos e $\sum_{j \geq 1} \lambda_j = n$. Então, existe um inteiro t tal que $a_t = n$ e $a_k \leq n$, para todo o $k \geq 0$.

Concluimos que $\underline{a} \in D_n$. Também se verifica facilmente que $\Delta \underline{a} = \underline{\lambda}$.

Sendo Δ um mergulho de ordem sobrejectivo, deduzimos que é um isomorfismo de ordem entre D_n e C_n . Em particular, C_n é um reticulado. ■

No que segue, denotamos o reticulado das composições de n simplesmente por C_n , referindo-nos às operações de ínfimo e supremo por \vee_C e \wedge_C .

Atendendo ao isomorfismo de ordem $\Delta : D_n \rightarrow C_n$, interessamo-nos naturalmente pelas sucessões de D_n cuja imagem por Δ é uma partição de n .

Seja n um inteiro não negativo. Dizemos que $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in D_n$ é uma sucessão *côncava* se

$$2a_k \geq a_{k+1} + a_{k-1}, \text{ para qualquer } k \geq 1.$$

Denotamos por V_n o subconjunto das sucessões côncavas de D_n .

Seja $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in V_n$. Da definição de sucessão côncava, deduzimos que

$$a_k - a_{k-1} \geq a_{k+1} - a_k, \quad \text{para qualquer } k \geq 1,$$

o que significa que $\Delta \underline{a} \in P_n$. A implicação contrária verifica-se do mesmo modo. Portanto, temos

$$\underline{a} \in V_n \quad \text{se e só se} \quad \Delta \underline{a} \in P_n. \quad (1.2)$$

Combinando a afirmação (1.2) com o isomorfismo de ordem referido na proposição 1.5, concluímos que V_n constitui um subconjunto finito de D_n .

Visto que D_n e C_n são reticulados, questionamo-nos naturalmente acerca da estrutura de V_n e P_n .

Sejam $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}$, $\underline{b} = (b_k)_{k \geq 0} \in D_n$ sucessões côncavas. Não é difícil verificar que $\underline{a} \wedge_D \underline{b} = (\min\{a_k, b_k\})_{k \geq 0}$ é ainda uma sucessão côncava. De facto, para cada $k \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} 2(\underline{a} \wedge_D \underline{b})_k &= 2 \min\{a_k, b_k\} \\ &= \min\{2a_k, 2b_k\} \geq \min\{a_{k+1} + a_{k-1}, b_{k+1} + b_{k-1}\} \\ &\geq \min\{a_{k+1}, b_{k+1}\} + \min\{a_{k-1}, b_{k-1}\} \\ &= (\underline{a} \wedge_D \underline{b})_{k+1} + (\underline{a} \wedge_D \underline{b})_{k-1}. \end{aligned}$$

No entanto, é de notar que $\underline{a} \vee_D \underline{b} = (\max\{a_k, b_k\})_{k \geq 0}$ pode não pertencer a V_n . Por exemplo, se \underline{a} e \underline{b} forem as sucessões inteiras de D_{12} definidas por

$$\underline{a} = (0, 4, 8, 12, 12, 12, 12, \dots), \quad \underline{b} = (0, 5, 7, 9, 11, 12, 12, \dots),$$

não é difícil verificar que \underline{a} e \underline{b} são côncavas. Contudo, a sucessão

$$\underline{a} \vee_D \underline{b} = (0, 5, 8, 12, 12, 11, \dots)$$

não é côncava, pois $2 \cdot 8 = 16 < 17 = 5 + 12$.

Em geral, V_n não é subreticulado de D_n , nem P_n é subreticulado de C_n . Contudo, mostrámos que V_n é fechado para o ínfimo. Então, pela afirmação (1.2), P_n é igualmente fechado para o ínfimo. Estas propriedades revelam-se fundamentais para atingir o objectivo central desta secção, isto é, a definição de uma noção de conjugação para sucessões que não são partições.

Seja $\underline{a} \in D_n$. Consideremos o seguinte subconjunto de V_n

$$V_{\underline{a}} = \{\underline{b} : \underline{b} \in V_n, \underline{a} \leq_D \underline{b}\}.$$

Visto que $\mathbf{1}_n = (0, n, n, \dots) \in V_n$, $V_{\underline{a}}$ é um conjunto não vazio. Como $V_{\underline{a}} \subseteq V_n$, $V_{\underline{a}}$ é um conjunto finito. Então, pelo que observámos, $V_{\underline{a}}$ tem ínfimo em V_n .

Para qualquer sucessão $\underline{a} \in D_n$, definimos $\underline{a}^V \in V_n$, que designamos por *fecho côncavo* de \underline{a} , como sendo o ínfimo de $V_{\underline{a}}$, isto é,

$$\underline{a}^V = \wedge_{V_n} \{\underline{b} : \underline{b} \in V_n, \underline{a} \leq_D \underline{b}\}.$$

É imediato da definição que se $\underline{a} \in V_n$, então $\underline{a}^V = \underline{a}$.

Observemos que a denominação de fecho côncavo não é inocente. De facto, não é difícil verificar que a aplicação $\underline{a} \mapsto \underline{a}^V$ determina um operador de fecho em D_n , cujos elementos fechados são as sucessões de V_n .

Atendendo ao isomorfismo entre D_n e C_n , podemos considerar uma construção análoga para composições.

Para qualquer $\underline{\lambda} \in C_n$, definimos *o fecho por partições* de $\underline{\lambda}$, que denotamos por $\underline{\lambda}^P$, como sendo o ínfimo em P_n do conjunto das partições de n que majoram $\underline{\lambda}$, isto é,

$$\underline{\lambda}^P = \wedge_{P_n} \{\underline{\gamma} : \underline{\gamma} \in P_n, \underline{\lambda} \leq_C \underline{\gamma}\}.$$

É imediato da definição que se $\underline{\lambda} \in P_n$, então $\underline{\lambda}^P = \underline{\lambda}$.

A aplicação $\underline{\lambda} \mapsto \underline{\lambda}^P$ define um operador de fecho em C_n , cujos elementos fechados são as partições de n .

É de notar que, para qualquer $\underline{a} \in D_n$, o isomorfismo $\Delta : D_n \rightarrow C_n$ satisfaz

$$\Delta(\underline{a}^V) = (\Delta\underline{a})^P.$$

No que se segue, pretendemos caracterizar a relação existente entre duas sucessões côncavas cujas sucessões diferença formam partições conjugadas. A aplicação que introduzimos agora revela-se de particular importância.

Seja n um inteiro não negativo e uma sucessão $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in D_n$. Definimos a sucessão $\Phi_n \underline{a} = ((\Phi_n \underline{a})_k)_{k \geq 0}$ por

$$(\Phi_n \underline{a})_k = \min_{j \geq 0} \{n - a_j + jk\}, \quad \text{para qualquer } k \geq 0.$$

Caso não exista ambiguidade, representamos Φ_n simplesmente por Φ . Se j for um inteiro tal que $(\Phi \underline{a})_k = n - a_j + jk$, dizemos que j *realiza* $(\Phi \underline{a})_k$.

Não é difícil verificar que Φ determina uma aplicação de D_n em V_n .

Lema 1.6 *Seja n um inteiro não negativo. Para qualquer $\underline{a} \in D_n$, $\Phi \underline{a} \in V_n$.*

Demonstração.

Seja $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in D_n$. É evidente da definição que $\Phi \underline{a}$ é uma sucessão inteira. Atendendo a que existe k tal que $a_k = n$, temos $(\Phi \underline{a})_0 = \min_{j \geq 0} \{n - a_j\} = 0$.

Seja $k \geq 0$. Como $a_{k+1} \geq a_k$, deduzimos que

$$(\Phi \underline{a})_{k+1} = \min_{j \geq 0} \{n - a_j + j(k+1)\} \geq \min_{j \geq 0} \{n - a_j + jk\} = (\Phi \underline{a})_k.$$

Da definição de mínimo, temos $(\Phi \underline{a})_k \leq n - a_0 + 0.k = n$, para todo o $k \geq 0$.

Por outro lado, sabemos que $a_k \leq n$, para todo o $k \geq 0$, donde concluímos que $j = 0$ realiza $(\Phi \underline{a})_n$. Então, $(\Phi \underline{a})_n = n - a_0 + 0.k = n$.

Verifiquemos agora que $\Phi \underline{a} \in D_n$ é uma sucessão côncava.

$$\begin{aligned} 2(\Phi \underline{a})_k &= 2 \min_{j \geq 0} \{n - a_j + jk\} \\ &= \min_{j \geq 0} \{n - a_j + j(k+1) + n - a_j + j(k-1)\} \\ &\geq \min_{j \geq 0} \{n - a_j + j(k+1)\} + \min_{j \geq 0} \{n - a_j + j(k-1)\} \\ &= (\Phi \underline{a})_{k+1} + (\Phi \underline{a})_{k-1}. \end{aligned}$$

■

A importância da aplicação Φ reside no facto de $\Delta \underline{a}$ e $\Delta \phi \underline{a}$ serem partições conjugadas para qualquer $\underline{a} \in V_n$, facto que provamos nas próximas proposições.

Proposição 1.7 *Seja n um inteiro não negativo. Sejam $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in V_n$ e $k \geq 0$. As afirmações seguintes são verdadeiras:*

(i) *o inteiro j realiza $(\Phi \underline{a})_k$ se e só se $(\Delta \underline{a})_j \geq k \geq (\Delta \underline{a})_{j+1}$;*

(ii) $(\Phi \underline{a})_k = \sum_{i \geq 1} \min \{(\Delta \underline{a})_i, k\}$;

(iii) *existe um índice j que realiza simultaneamente $(\Phi \underline{a})_{k+1}$ e $(\Phi \underline{a})_k$.*

Demonstração.

Seja $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in V_n$. Ao longo da demonstração, convencionamos que $(\Delta \underline{a})_0 > k$, para qualquer k .

(i) Seja $k \geq 0$. Como $a_k = \sum_{i=1}^k (\Delta \underline{a})_i$, podemos escrever

$$n - a_j + jk = \sum_{i \geq j+1} (\Delta \underline{a})_i + \sum_{i=1}^j k.$$

Então,

$$(\Phi \underline{a})_k = \min_{j \geq 0} \left\{ \sum_{i \geq j+1} (\Delta \underline{a})_i + \sum_{i=1}^j k \right\}. \quad (1.3)$$

$\Delta \underline{a}$ é uma partição de n , pelo que satisfaz (1.1). Atendendo a este facto, não é difícil verificar que um inteiro j minimiza a expressão (1.3) se e só se j for tal que $(\Delta \underline{a})_j \geq k \geq (\Delta \underline{a})_{j+1}$.

(ii) Seja $k \geq 0$. É imediato deduzir da expressão (1.3) que

$$(\Phi \underline{a})_k = \sum_{i \geq 1} \min \{(\Delta \underline{a})_i, k\}.$$

(iii) Seja $k \geq 0$. Consideremos o maior inteiro j tal que $(\Delta \underline{a})_j > k$. É claro pela alínea (i) que j realiza simultaneamente $(\Phi \underline{a})_k$ e $(\Phi \underline{a})_{k+1}$. ■

Estamos agora em condições de estabelecer a referida relação entre duas sucessões côncavas cujas sucessões diferença são partições conjugadas.

Proposição 1.8 *Seja n um inteiro não negativo. Sejam sucessões côncavas*

$\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}, \underline{b} = (b_k)_{k \geq 0} \in V_n$. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

- (i) $\Delta \underline{a}$ e $\Delta \underline{b}$ são partições de n conjugadas;
- (ii) $\underline{a} = \Phi \underline{b}$;
- (iii) $\underline{b} = \Phi \underline{a}$.

Demonstração.

Sejam $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}, \underline{b} = (b_k)_{k \geq 0} \in V_n$. Como referimos em (1.2), as sucessões diferença de \underline{a} e \underline{b} pertencem a P_n . Então, $\Delta \underline{a}$ e $\Delta \underline{b}$ são conjugadas se e só se

$$(\Delta \underline{a})_i = |\{j : (\Delta \underline{b})_j \geq i\}| = \max \{j : (\Delta \underline{b})_j \geq i\}, \quad \forall i \geq 1.$$

Somando em i de 1 até k , esta última condição é equivalente a

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{i=1}^k (\Delta \underline{a})_i = \sum_{i=1}^k \max \{j : (\Delta \underline{b})_j \geq i\} \\ &= \sum_{r \geq 1} \min \{(\Delta \underline{b})_r, k\} \\ &= (\Phi \underline{b})_k. \end{aligned}$$

Concluimos que a afirmação contida na alínea (i) é equivalente à afirmação contida na alínea (ii). A demonstração da equivalência entre as alíneas (i) e (iii) estabelece-se do mesmo modo. ■

A proposição 1.8 afirma que a restrição de Φ a V_n é uma aplicação bijectiva, correspondendo à bijecção $\underline{\lambda} \rightarrow \underline{\lambda}'$ determinada pela conjugação em P_n . Isto é, o isomorfismo $\Delta : D_n \rightarrow C_n$ faz com que as propriedades da conjugação em P_n se verifiquem para Φ em V_n . Em particular, temos, para qualquer $\underline{a} \in V_n$,

(i) $\Delta\Phi\underline{a}$ e $\Delta\underline{a}$ são partições conjugadas;

(ii) $\Phi^2\underline{a} = \underline{a}$.

Consideramos agora a acção de Φ em elementos arbitrários de D_n .

Proposição 1.9 *Seja n um inteiro não negativo. Para quaisquer $\underline{a}, \underline{b} \in D_n$, as afirmações seguintes são verdadeiras:*

(i) se $\underline{a} \leq_D \underline{b}$, então $\Phi\underline{a} \geq_D \Phi\underline{b}$;

(ii) $\underline{a} \leq_D \Phi^2\underline{a}$.

Demonstração.

(i) Sejam $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0}, \underline{b} = (b_k)_{k \geq 0} \in D_n$. Se $\underline{a} \leq_D \underline{b}$, então $a_k \leq b_k$, para qualquer $k \geq 0$. Temos então

$$(\Phi\underline{a})_k = \min_{j \geq 0} \{n - a_j + jk\} \geq \min_{j \geq 0} \{n - b_j + jk\} = (\Phi\underline{b})_k, \text{ para qualquer } k \geq 0.$$

Concluímos que $\Phi\underline{a} \geq_D \Phi\underline{b}$.

(ii) Seja $\underline{a} = (a_k)_{k \geq 0} \in D_n$. Para cada $k \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} (\Phi^2\underline{a})_k &= \min_{j \geq 0} \{n - (\Phi\underline{a})_j + jk\} \\ &= \min_{j \geq 0} \{n - \min_{r \geq 0} \{n - a_r + rj\} + jk\} \\ &= \min_{j \geq 0} \{\max_{r \geq 0} \{a_r + j(k - r)\}\} \\ &\geq \min_{j \geq 0} \{a_k\} = a_k. \end{aligned}$$

■

Deduzimos da proposição 1.10 que $\Phi : D_n \rightarrow D_n$ é um operador de Galois.

Proposição 1.10 *Seja n um inteiro não negativo. A aplicação $\Phi : D_n \rightarrow D_n$ é um operador de Galois em D_n . Os elementos fechados de D_n são as sucessões de V_n e portanto*

$$\Phi^2\underline{a} = \underline{a}^V, \text{ para qualquer } \underline{a} \in D_n.$$

Demonstração.

Resulta imediatamente da proposição 1.9 que $\Phi : D_n \rightarrow D_n$ é um operador de Galois em D_n . Tendo em conta a proposição 1.1 e o lema 1.6, concluímos que os elementos fechados de D_n relativamente ao operador de fecho $\Phi^2 : D_n \rightarrow D_n$ são exactamente as sucessões de V_n .

Seja $\underline{a} \in D_n$. Pelo que referimos anteriormente, é claro que $\Phi^2 \underline{a} \in V_n$. Pela definição de fecho côncavo, temos que

$$\underline{a} \leq_D \underline{a}^V \leq_D \Phi^2 \underline{a}.$$

A alínea (i) da proposição 1.9 permite deduzir que

$$\Phi \underline{a} \leq_D \Phi^3 \underline{a} \leq_D \Phi \underline{a}^V \leq_D \Phi \underline{a}$$

e portanto $\Phi^3 \underline{a} = \Phi \underline{a}^V$. Atendendo a que a restrição de Φ a V_n é uma aplicação bijectiva, concluímos que

$$\Phi^2 \underline{a} = \underline{a}^V.$$

■

Tendo em conta o isomorfismo de ordem $\Delta : D_n \rightarrow C_n$, podemos enunciar o principal resultado desta secção.

Teorema 1.11 *Seja n um inteiro não negativo e $\underline{a}, \underline{b} \in D_n$. Então $\underline{a} = \Phi \underline{b}$ se e só se $\Delta \underline{a}$ é uma partição de n e*

$$(\Delta \underline{a})' = (\Delta \underline{b})^P,$$

isto é, a partição conjugada de $\Delta \underline{a}$ é o fecho por partições de $\Delta \underline{b}$.

Capítulo 2

Partições associadas a conjuntos parcialmente ordenados

No final dos anos quarenta, R. P. Dilworth [13] demonstra que a cardinalidade máxima de uma antichain num conjunto parcialmente ordenado finito é igual ao número mínimo de cadeias cuja união cobre o conjunto. Em 1971, L. Mirsky [23] prova que o dual do teorema de Dilworth é igualmente verdadeiro.

Neste capítulo, apresentamos generalizações dos resultados de R. P. Dilworth e L. Mirsky demonstradas nos anos setenta. A extensão do teorema de Dilworth a k -famílias deve-se ao trabalho de C. Greene e D. Kleitman [16], enquanto que o dual da generalização se deve a C. Greene [17].

Seguidamente, para um conjunto parcialmente ordenado arbitrário, introduzimos duas partições da cardinalidade do conjunto, cuja existência decorre dos resultados anteriores. Seguindo o artigo [17] de C. Greene, estabelecemos uma relação de grande elegância entre estas duas partições.

2.1 Introdução

No que se segue, apresentamos os principais resultados do capítulo, relegando as demonstrações para as secções seguintes.

Salvo indicação em contrário, os resultados apresentados podem ser encontrados em [16] e [17].

Doravante, P representa um conjunto parcialmente ordenado finito.

O teorema de Dilworth [13] estabelece uma relação entre a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P e o número mínimo de cadeias cuja união é o conjunto P .

Teorema 2.1 (Dilworth) [13] *Num conjunto parcialmente ordenado finito, a cardinalidade máxima de uma anticadeia é igual ao número mínimo de cadeias cuja união cobre o conjunto parcialmente ordenado.*

Invertendo o papel das anticadeias com as cadeias, obtemos o dual do teorema de Dilworth, demonstrado em 1971 por L. Mirsky [23].

Teorema 2.2 (Mirsky) [23] *Num conjunto parcialmente ordenado finito, a cardinalidade máxima de uma cadeia é igual ao número mínimo de anticadeias cuja união cobre o conjunto parcialmente ordenado.*

Uma família $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$ de subconjuntos de P disjuntos dois a dois cuja união é igual a P diz-se uma \mathcal{C} -partição de P se, para cada $1 \leq i \leq n$, \mathcal{C}_i é uma cadeia de P . Denotamos o conjunto das \mathcal{C} -partições de P por $\overline{\mathcal{C}(P)}$.

Dualmente, dizemos que uma família $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s)$ de subconjuntos de P disjuntos dois a dois cuja união é igual a P é uma \mathcal{A} -partição de P se, para cada $1 \leq i \leq s$, \mathcal{A}_i é uma anticadeia de P . O conjunto das \mathcal{A} -partições de P é denotado por $\overline{\mathcal{A}(P)}$.

Exemplo 2.3 Seja $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ o conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse está representado na figura 2.1.

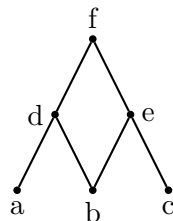


Figura 2.1: Conjunto parcialmente ordenado P

É evidente que $\{a, b, c\}$ constitui uma anticadeia de cardinalidade máxima. Não é difícil verificar que

$$\mathcal{C} = (\{a, d, f\}, \{b, e\}, \{c\})$$

forma uma \mathcal{C} -partição de P com o número mínimo de parcelas. Por outro lado, $\{b, e, f\}$ representa uma cadeia de cardinalidade máxima e

$$\mathcal{A} = (\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\})$$

é uma \mathcal{A} -partição de P com o número mínimo de parcelas.

No sentido de introduzir generalizações dos conceitos de anticadeia e cadeia, observamos que uma anticadeia é um subconjunto de P que não contém cadeias de cardinalidade 2, assim como uma cadeia é um subconjunto de P que não contém anticadeias de cardinalidade 2.

Definição 2.4 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e A, B subconjuntos de P . Seja k um inteiro positivo.

Dizemos que A é uma k -família de P se A não contém cadeias de cardinalidade superior a k . Dizemos que B é uma k -cofamília de P se B não contém anticadeias de cardinalidade superior a k .

Pelo que foi observado anteriormente, torna-se claro que, num conjunto parcialmente ordenado, uma anticadeia constitui uma 1-família, assim como uma cadeia constitui uma 1-cofamília.

A proposição que se segue é uma consequência imediata dos teoremas de Dilworth e Mirsky.

Proposição 2.5 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e A, B subconjuntos de P . Seja k um inteiro positivo.*

A é uma k -família de P se e só se A for igual à união de k anticadeias de P e B é uma k -cofamília de P se e só se B for igual à união de k cadeias de P .

Consideremos o conjunto parcialmente ordenado P referido no exemplo 2.3. É evidente que $A = \{a, b, c, d, e\}$ constitui uma 2-família de P , visto que não contém cadeias com mais de 2 elementos. Temos também que

$$A = \{a, b, c\} \cup \{d, e\},$$

onde $\{a, b, c\}$ e $\{d, e\}$ são anticadeias em P .

Sendo o nosso objectivo obter generalizações dos teoremas de Dilworth e Mirsky para k -famílias e k -cofamílias e envolvendo estes teoremas cadeias e anticadeias de cardinalidade máxima, interessamo-nos naturalmente por k -famílias e k -cofamílias de cardinalidade máxima.

Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja k um inteiro positivo. Introduzimos a seguinte notação:

(i) $d_k(P)$ denota a cardinalidade máxima de uma k -família de P ;

(ii) $\hat{d}_k(P)$ denota a cardinalidade máxima de uma k -cofamília de P .

Por convenção, estabelecemos que $d_0(P) = \hat{d}_0(P) = 0$.

Se c for a cardinalidade máxima de uma cadeia em P , observamos que P forma uma c -família, pelo que

$$d_k(P) = |P|, \quad \text{para todo o } k \geq c.$$

Dualmente, se l representar a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P , também temos

$$\hat{d}_k(P) = |P|, \quad \text{para todo o } k \geq l.$$

Atendendo de novo ao exemplo 2.3, verificamos que, para cada inteiro positivo k , $d_k(P)$ é dado por:

k	$d_k(P)$	k -família de cardinalidade máxima
1	3	$\{a, b, c\}$
2	5	$\{a, b, c, d, e\}$
≥ 3	6	$\{a, b, c, d, e, f\}$

Não é difícil verificar que a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P é limitada superiormente pelo número de parcelas de qualquer \mathcal{C} -partição de P . O teorema de Dilworth afirma que existe uma \mathcal{C} -partição de P que tem exactamente $d_1(P)$ parcelas.

No que se segue, introduzimos um limite numérico para a cardinalidade máxima de uma k -família de P .

Definição 2.6 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$ uma \mathcal{C} -partição de P . Para cada inteiro $k \geq 1$, definimos

$$\beta_k(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \min\{|\mathcal{C}_i|, k\}.$$

Observamos que se \mathcal{C} for uma \mathcal{C} -partição de P , então

$$d_k(P) \leq \beta_k(\mathcal{C}), \quad \text{para todo o } k \geq 1,$$

visto que uma k -família intersecta qualquer cadeia de P quanto muito k vezes.

Consideremos novamente o conjunto parcialmente ordenado P referido no exemplo 2.3. Notámos que a família

$$\mathcal{C} = (\{a, d, f\}, \{b, e\}, \{c\})$$

forma uma \mathcal{C} -partição de P com o número mínimo de parcelas. Para cada inteiro positivo k , $\beta_k(\mathcal{C})$ é dado por:

k	$\beta_k(\mathcal{C})$	$d_k(P)$
1	3	3
2	5	5
≥ 3	6	6

É de referir que \mathcal{C} satisfaz $\beta_k(\mathcal{C}) = d_k(P)$, para todo o inteiro positivo k .

Estamos agora em condições de enunciar a generalização do teorema de Dilworth, generalização demonstrada em [16] por C. Greene e D. Kleitman.

Teorema 2.7 (Greene-Kleitman) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja k um inteiro positivo. Então*

$$d_k(P) = \min\{\beta_k(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \overline{\mathcal{C}(P)}\}.$$

No caso $k = 1$, o teorema 2.7 afirma que existe uma \mathcal{C} -partição de P com $d_1(P)$ parcelas, pelo que reencontramos o teorema de Dilworth. Em geral, podemos introduzir a seguinte definição.

Definição 2.8 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja k um inteiro positivo. Se \mathcal{C} for uma \mathcal{C} -partição de P satisfazendo*

$$\beta_k(\mathcal{C}) = d_k(P),$$

dizemos que \mathcal{C} é uma \mathcal{C} -partição k -saturada.

O teorema de Greene-Kleitman afirma que, num conjunto parcialmente ordenado, existem \mathcal{C} -partições k -saturadas para qualquer inteiro positivo k . Além

de generalizar o teorema de Dilworth, o teorema de Greene-Kleitman estabelece esta propriedade de grande importância, como veremos ao longo do trabalho.

Outro objectivo deste capítulo é a obtenção do teorema dual do teorema de Greene-Kleitman. Nesse sentido, observemos que o teorema de Mirsky assegura que o número de parcelas de qualquer \mathcal{A} -partição de P tem de ser maior ou igual do que $\hat{d}_1(P)$.

Analogamente ao que fizemos para \mathcal{C} -partições, definimos um limite numérico para a cardinalidade máxima de uma k -cofamília de P .

Definição 2.9 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s)$ uma \mathcal{A} -partição de P . Para cada inteiro $k \geq 1$, definimos

$$\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^s \min\{|\mathcal{A}_i|, k\}.$$

A definição de k -cofamília implica claramente que

$$\hat{d}_k(P) \leq \hat{\beta}_k(\mathcal{A}), \quad \text{para qualquer } \mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}(P)}.$$

Estamos em condições de generalizar o teorema de Mirsky, ou seja, de enunciar o teorema de Greene [17].

Teorema 2.10 (Greene) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja k um inteiro positivo. Então*

$$\hat{d}_k(P) = \min\{\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}(P)}\}.$$

Do mesmo modo que para \mathcal{C} -partições, introduzimos a seguinte definição.

Definição 2.11 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja k um inteiro positivo. Se \mathcal{A} for uma \mathcal{A} -partição de P satisfazendo

$$\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) = \hat{d}_k(P),$$

dizemos que \mathcal{A} é uma \mathcal{A} -partição k -saturada.

O teorema de Greene generaliza o teorema de Mirsky ao estabelecer que, para qualquer inteiro positivo k , existe uma \mathcal{A} -partição de P k -saturada.

Exemplo 2.12 Seja $P = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ o conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse é

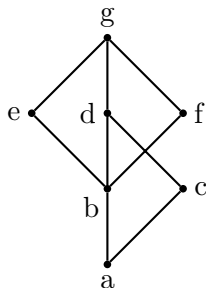


Figura 2.2: Conjunto parcialmente ordenado P

Se $k = 3$, o teorema de Greene-Kleitman afirma que existe uma \mathcal{C} -partição de P k -saturada. Não é difícil verificar que $d_3(P) = 6$. Assim sendo, a \mathcal{C} -partição $\mathcal{C} = (\{a, b, e, g\}, \{c, d\}, \{f\})$ é 3-saturada, visto que

$$\beta_3(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^3 \min\{|\mathcal{C}_i|, 3\} = 3 + 2 + 1 = 6 = d_3(P).$$

No caso de $k = 2$, o teorema de Greene afirma que existe uma \mathcal{A} -partição de P k -saturada. A \mathcal{A} -partição $\mathcal{A} = (\{a\}, \{b, c\}, \{d, e, f\}, \{g\})$ é 2-saturada, pois

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^4 \min\{|\mathcal{A}_i|, 2\} = 1 + 2 + 2 + 1 = 6 = \hat{d}_2(P).$$

Vejamos finalmente como associar a um conjunto parcialmente ordenado finito duas sucessões de particular importância.

Definição 2.13 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Para cada inteiro positivo k , definimos

$$\Delta_k(P) = d_k(P) - d_{k-1}(P),$$

$$\hat{\Delta}_k(P) = \hat{d}_k(P) - \hat{d}_{k-1}(P).$$

Pelas convenções anteriormente introduzidas, temos

$$\Delta_1(P) = d_1(P) \text{ e } \widehat{\Delta}_1(P) = \widehat{d}_1(P).$$

Os teoremas centrais que apresentamos em seguida são consequências do teorema de Greene-Kleitman. Afirmam que as sucessões que acabámos de introduzir constituem partições do inteiro $|P|$, que se relacionam de forma particularmente simples.

Teorema 2.14 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Se c denota a cardinalidade máxima de uma cadeia em P , então*

$$(i) \quad \Delta_1(P) + \dots + \Delta_c(P) = |P|;$$

$$(ii) \quad \Delta_1(P) \geq \dots \geq \Delta_c(P).$$

Teorema 2.15 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Se l denota a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P , então*

$$(i) \quad \widehat{\Delta}_1(P) + \dots + \widehat{\Delta}_l(P) = |P|;$$

$$(ii) \quad \widehat{\Delta}_1(P) \geq \dots \geq \widehat{\Delta}_l(P).$$

Terminamos com o teorema central desta secção, que estabelece uma relação muito elegante entre as partições $\Delta(P)$ e $\widehat{\Delta}(P)$.

Teorema 2.16 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Então*

$$\Delta(P)' = (\widehat{\Delta}_1(P), \dots, \widehat{\Delta}_l(P)),$$

onde l representa a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P .

Consideremos de novo o conjunto parcialmente ordenado P do exemplo 2.12. Não é difícil verificar que $d_1(P) = 3$, $d_2(P) = 5$, $d_3(P) = 6$ e $d_4(P) = 7$. Então,

$$\Delta(P) = (3 - 0, 5 - 3, 6 - 5, 7 - 6) = (3, 2, 1, 1).$$

Como estabelece o teorema 2.14, trata-se de uma partição de $7 = |P|$. Pelo teorema 2.16, temos

$$\widehat{\Delta}(P) = (3, 2, 1, 1)' = (4, 2, 1).$$

2.2 O reticulado das k -famílias

Em 1960, R. P. Dilworth [14] mostra que o conjunto das anticadeias de cardinalidade máxima de um conjunto parcialmente ordenado finito pode ser munido de uma estrutura de reticulado. Em 1976, C. Greene e D. Kleitman [16] generalizam este resultado ao conjunto das k -famílias de cardinalidade máxima.

Nesta secção, expomos os resultados de C. Greene e D. Kleitman que levam a esta generalização. As propriedades do reticulado das k -famílias de cardinalidade máxima são fulcrais na demonstração das extensões dos teoremas de Dilworth e Mirsky. Para mais detalhes, sugerimos [16].

No que se segue, P é um conjunto parcialmente ordenado finito. Representamos o conjunto das anticadeias de P por $\mathcal{A}(P)$ e o conjunto das anticadeias de cardinalidade máxima por $\mathcal{S}(P)$.

Para cada subconjunto S de P , denotamos por $\text{Max}[S]$ o conjunto dos elementos maximais de S e por $\text{Min}[S]$ o conjunto dos elementos minimais de S . Tendo em conta que dois elementos maximais distintos não são comparáveis, temos $\text{Max}[S] \in \mathcal{A}(P)$. Por razões análogas, também temos que $\text{Min}[S] \in \mathcal{A}(P)$.

Definição 2.17 Se $A, B \in \mathcal{A}(P)$, então $A \leq_{\mathcal{A}} B$ se e só se, para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $a \leq b$.

Não é difícil verificar que a relação $\leq_{\mathcal{A}}$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{A}(P)$. Observamos que se $A, B \in \mathcal{A}(P)$ são tais que $A \subseteq B$, então $A \leq_{\mathcal{A}} B$. O recíproco desta afirmação não é necessariamente verdadeiro.

A partir de agora, consideramos definida em $\mathcal{A}(P)$ a relação de ordem $\leq_{\mathcal{A}}$. Caso não exista ambiguidade, denotamos $\leq_{\mathcal{A}}$ simplesmente por \leq .

Como observámos no primeiro capítulo, o conjunto dos ideais de ordem de P munido da relação de inclusão é um reticulado, sendo representado por $\mathcal{I}(P)$. Este reticulado tem uma relação muito directa com $\mathcal{A}(P)$.

Com efeito, se S for um subconjunto de P , definimos

$$\overline{S} = \{y \mid \exists x \in S : y \leq x\}.$$

Não é difícil mostrar que $\overline{S} \in \mathcal{I}(P)$ e $S \subseteq \overline{S}$.

Consideremos a aplicação $A \mapsto \overline{A}$ de $\mathcal{A}(P)$ em $\mathcal{I}(P)$. Prova-se facilmente que se trata de uma aplicação bijectiva que preserva a ordem, cuja aplicação inversa é dada por $I \mapsto \text{Max}[I]$. Dado que esta aplicação também preserva a

ordem, concluímos que estamos perante um isomorfismo de ordem. Em particular, para qualquer $A \in \mathcal{A}(P)$, temos $A = \text{Max}[\overline{A}]$.

Teorema 2.18 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. $\mathcal{A}(P)$ é um reticulado com operações de supremo e ínfimo definidas por*

$$A \vee B = \text{Max}[\overline{A} \cup \overline{B}],$$

$$A \wedge B = \text{Max}[\overline{A} \cap \overline{B}].$$

O teorema 2.18 explicita como se calculam o supremo e o ínfimo em $\mathcal{A}(P)$. O supremo admite ainda outra caracterização que se revela de grande utilidade.

Lema 2.19 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e $A, B \in \mathcal{A}(P)$. Então*

$$A \vee B = \text{Max}[A \cup B].$$

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{A}(P)$. Como $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, é claro que

$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \leq \text{Max}[\overline{A} \cup \overline{B}] = A \vee B.$$

Então, $\text{Max}[A \cup B] \leq A \vee B$. Por outro lado, $A \cup B = \text{Max}[\overline{A \cup B}]$. Como $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, então

$$A \vee B = \text{Max}[\overline{A} \cup \overline{B}] \leq \text{Max}[\overline{A \cup B}] = A \cup B \leq \text{Max}[A \cup B].$$

Concluimos que $A \vee B = \text{Max}[A \cup B]$. ■

Para demonstrar que $\mathcal{S}(P)$ é um reticulado, torna-se necessário introduzir uma nova operação sobre $\mathcal{A}(P)$.

Definição 2.20 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}(P)$, definimos*

$$A \Delta B = ((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B).$$

Lema 2.21 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e $A, B \in \mathcal{A}(P)$. Então $A \Delta B \subseteq A \wedge B$ e logo $A \Delta B \in \mathcal{A}(P)$ e $A \Delta B \leq A \wedge B$.*

Demonstração.

Seja $x \in A\Delta B = ((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B)$.

Se $x \in A \cap B$, então $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Consideremos $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$ tal que $x \leq y$.

Como $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$, existem $a \in A$, $b \in B$ tais $x \leq y \leq a$ e $x \leq y \leq b$. Como $A, B \in \mathcal{A}(P)$, deduzimos que $x = a = b = y$ e logo $x \in \text{Max}[\overline{A} \cap \overline{B}] = A \wedge B$.

Se $x \in (A \cap B) \setminus (A \vee B)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x \in A \subseteq \overline{A}$. Suponhamos que $x \notin \overline{B}$.

Seja $z \in A \cup B$ tal que $x \leq z$. Se $z \in A$, então $x = z$ e logo x é maximal em $A \cup B$. Se $z \in B$ então $x \in \overline{B}$. Ambas as situações conduzem a uma contradição, pelo que concluímos que $x \in \overline{B}$. Temos então

$$(A \cup B) \setminus (A \vee B) \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Por um raciocínio análogo ao do primeiro caso, $x \in \text{Max}[\overline{A} \cap \overline{B}] = A \wedge B$. Concluímos que

$$A\Delta B \subseteq A \wedge B.$$

As restantes afirmações decorrem do facto de todo o subconjunto de uma anticadeia em P formar uma anticadeia e da relação existente entre a inclusão e a ordem \leq em $\mathcal{A}(P)$. ■

Observemos que a inclusão referida no lema 2.21 pode ser estrita, ou seja, podemos ter $A\Delta B \subsetneq A \wedge B$.

Lema 2.22 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e $A, B \in \mathcal{A}(P)$.*

Então

$$(i) \quad |A| + |B| = |A \vee B| + |A\Delta B|;$$

$$(ii) \quad |A| + |B| \leq |A \vee B| + |A \wedge B|.$$

Demonstração.

(i) Por definição, $A\Delta B = ((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B)$. Então

$$|A\Delta B| = |((A \cup B) \setminus (A \vee B))| + |A \cap B| - |(A \cap B) \setminus (A \vee B)|.$$

Pelo lema 2.19, temos $A \cap B \leq A \vee B$ e logo $(A \cap B) \setminus (A \vee B) = \emptyset$. Então

$$|A\Delta B| = |A \cup B| - |A \vee B| + |A \cap B|,$$

donde concluímos que $|A\Delta B| = |A| + |B| - |A \vee B|$.

(ii) Pelo lema 2.21, temos que $A\Delta B \subseteq A \wedge B$. Então

$$|A \vee B| + |A\Delta B| \leq |A \vee B| + |A \wedge B|.$$

Pela alínea (i), concluímos que $|A| + |B| \leq |A \vee B| + |A \wedge B|$. ■

Lema 2.23 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Se $A \in \mathcal{S}(P)$ e $B \in \mathcal{A}(P)$, então*

$$|A \vee B| \geq |B|, |A \wedge B| \geq |B| \text{ e } |A\Delta B| \geq |B|.$$

Demonstração.

Seja $A \in \mathcal{S}(P)$ e $B \in \mathcal{A}(P)$. Então $|A| = d_1(P)$.

Pelo lema 2.22, temos que $|A| + |B| = |A \vee B| + |A\Delta B|$. Logo

$$|A \vee B| = d_1(P) + |B| - |A\Delta B|.$$

Como $A \vee B \in \mathcal{A}(P)$, temos $|A \vee B| \leq d_1(P)$. Concluímos que

$$d_1(P) + |B| - |A\Delta B| \leq d_1(P),$$

ou seja, $|B| \leq |A\Delta B|$.

Pelo lema 2.21, temos $|B| \leq |A\Delta B| \leq |A \wedge B|$ e logo $|B| \leq |A \wedge B|$. ■

Lema 2.24 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e $A, B \in \mathcal{S}(P)$.*

Então

$$A \vee B, A \wedge B, A\Delta B \in \mathcal{S}(P).$$

Além disso, $A \wedge B = A\Delta B$.

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{S}(P)$. Então $|A| = |B| = d_1(P)$. Pelo lema anterior,

$$|A \vee B| \geq |B| = d_1(P), |A \wedge B| \geq |B| = d_1(P) \text{ e } |A\Delta B| \geq |B| = d_1(P).$$

Concluímos portanto que

$$|A \vee B| = |A \wedge B| = |A\Delta B| = d_1(P).$$

Por outro lado, pelo lema 2.21, $A\Delta B \subseteq A \wedge B$. Sendo $|A \wedge B| = |A\Delta B| = d_1(P)$, concluímos que $A \wedge B = A\Delta B$. ■

O lema 2.24 afirma que $\mathcal{S}(P)$ é fechado para as operações \vee , \wedge e Δ , permitindo enunciar o teorema seguinte, demonstrado por R. P. Dilworth em [14].

Teorema 2.25 (Dilworth) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. O conjunto das anticadeias de cardinalidade máxima de P é um reticulado.*

Demonstração.

Atendendo ao lema 2.24, se $A, B \in \mathcal{S}(P)$, então $A \vee B, A \wedge B \in \mathcal{S}(P)$. Então $\mathcal{S}(P)$ é um subreticulado de $\mathcal{A}(P)$. Em particular, $\mathcal{S}(P)$ é um reticulado. ■

Como foi anunciado anteriormente, o principal objectivo desta secção consiste em estabelecer uma generalização do teorema 2.25 para k -famílias.

No que se segue, k denota um inteiro positivo, $\mathcal{A}_k(P)$ é o conjunto das k -famílias de P e $\mathcal{S}_k(P)$ o conjunto das k -famílias de P de cardinalidade máxima.

Pela proposição 2.5, sabemos que um subconjunto de P é uma k -família se e só se for união de k anticadeias. Seguidamente, definimos a partição canónica de uma k -família.

Definição 2.26 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Seja $A \in \mathcal{A}_k(P)$.*

Para cada $x \in A$, seja $\delta_A(x)$ a cardinalidade máxima de uma cadeia em A com elemento mínimo igual a x . Chamamos *profundidade de x em A* a $\delta_A(x)$.

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, definimos

$$A_i = \{x \in A : \delta_A(x) = i\}.$$

Observemos que dois elementos de A distintos e comparáveis não podem ter a mesma profundidade, pelo que as parcelas da família (A_1, \dots, A_k) são anticadeias disjuntas. (A_1, \dots, A_k) é uma partição de A constituída por k anticadeias, que designamos por *partição canónica* de A .

É de referir que algumas parcelas da partição canónica de A podem ser vazias. Nesse caso, A forma uma k' -família com $k' < k$. A partição canónica possui ainda outra característica importante.

Lema 2.27 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Seja $A \in \mathcal{A}_k(P)$. A partição canónica de A , (A_1, \dots, A_k) , é a única \mathcal{A} -partição de A que satisfaz*

$$A_k \leq A_{k-1} \leq \dots \leq A_1.$$

Demonstração.

Seja $A \in \mathcal{A}_k(P)$ e (A_1, \dots, A_k) a sua partição canónica. Seja $i \in \{2, \dots, k\}$ e $x \in A_i$. Seja

$$x < x_{i-1} < \dots < x_1$$

uma cadeia em A com elemento mínimo igual a x de cardinalidade máxima. Temos claramente $\delta_A(x_{i-1}) \geq i - 1$.

Se $\delta_A(x_{i-1}) > i - 1$, é possível construir uma cadeia de cardinalidade superior a i com elemento mínimo igual a x , contradizendo o facto de $\delta_A(x) = i$.

Então $\delta_A(x_{i-1}) = i - 1$ e $x_{i-1} \in A_{i-1}$ e logo $A_i \leq A_{i-1}$. Concluimos que

$$A_k \leq A_{k-1} \leq \dots \leq A_1.$$

Quanto à unicidade, seja (B_1, \dots, B_k) uma \mathcal{A} -partição de A satisfazendo

$$B_k \leq B_{k-1} \leq \dots \leq B_1.$$

Vejamos que $B_i \subseteq A_i$ por indução em i .

Caso $i = 1$: se $x \in B_1$, então $x \in A_j$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Como $A_k \leq A_{k-1} \leq \dots \leq A_1$, existe $y \in A_1$ tal que $x \leq y$.

Por outro lado, $y \in B_l \leq B_1$ para algum $l \in \{1, \dots, k\}$. Seja $z \in B_1$ tal que $x \leq y \leq z$. Como $B_1 \in \mathcal{A}(P)$, então $x = z = y$ e logo $x \in A_1$.

Seja $i > 1$ e suponhamos que $B_i \subseteq A_i$.

Se $x \in B_{i+1}$, então $x \in A_j$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$.

Se $j \leq i$, então $B_{i+1} \leq B_j$ e logo $x \leq y$ para algum $y \in B_j$. Ora, por hipótese de indução, $B_j \subseteq A_j$, donde $x, y \in A_j$. Como $A_j \in \mathcal{A}(P)$, concluimos que $x = y$. Mas então $x \in B_{i+1} \cap B_j = \emptyset$. Concluimos portanto que $j \geq i + 1$.

Então, em particular, temos $A_j \leq A_{i+1}$.

Seja $z \in A_{i+1}$ tal que $x \leq z$ e vejamos que $z \in B_{i+1}$.

Como $x \in B_{i+1}$, então $z \in B_l$ com $l \leq i + 1$. Se $l < i + 1$, por hipótese de indução, $z \in A_l$. Mas tal não é possível pois $\delta_A(z) = i + 1$.

Concluimos que $l = i + 1$ e portanto $z \in B_{i+1}$. Como $B_{i+1} \in \mathcal{A}(P)$ e $x \leq z$, temos $x = z$. Então $\delta_A(x) = \delta_A(z) = i + 1$ e portanto $x \in A_{i+1}$.

Como pretendido, $B_{i+1} \subseteq A_{i+1}$.

Vejamos por último que $A_i \subseteq B_i$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Se $x \in A_i$, então $x \in B_j$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Como $B_j \subseteq A_j$, então $x \in A_j$. Mas então $j = i$ e portanto $x \in B_i$. ■

O lema 2.27 possibilita a definição de uma relação de ordem entre k -famílias, induzida pela ordem $\leq_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}(P)$.

Definição 2.28 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ com partições canônicas (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) respectivamente. Então

$$A \leq_k B \text{ se e só se } A_i \leq_A B_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Não é difícil constatar que \leq_k é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{A}_k(P)$. No intuito de demonstrar que $(\mathcal{A}_k(P), \leq_k)$ é um reticulado, torna-se necessário descrever o supremo e o ínfimo de duas k -famílias. A definição das operações componente a componente surge naturalmente.

Definição 2.29 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ com partições canônicas (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) respectivamente. Definimos

$$A \vee B = \bigcup_{i=1}^k A_i \vee B_i,$$

$$A \wedge^* B = \bigcup_{i=1}^k A_i \wedge B_i,$$

$$A \Delta B = \bigcup_{i=1}^k A_i \Delta B_i.$$

Lema 2.30 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ com partições canônicas respectivas (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) . Então*

$$(A_1 \vee B_1, \dots, A_k \vee B_k)$$

é a partição canônica de $A \vee B$ e, para quaisquer $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$, temos

$$(A_i \Delta B_i) \cap (A_j \Delta B_j) = \emptyset.$$

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ nas condições do enunciado. Pela sua definição, é evidente que $A \vee B$ e $A \Delta B$ constituem k -famílias por serem uniões de k anticadeias. Começemos por demonstrar que $A \vee B$ é união disjunta. Sejam $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tais que $i \neq j$. Sem perda de generalidade, assumimos que $i > j$.

Seja $x \in (A_i \vee B_i) \cap (A_j \vee B_j)$. Pelo lema 2.19, $x \in \text{Max}[A_i \cup B_i] \cap \text{Max}[A_j \cup B_j]$. Como $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$, temos que $x \in A_i \cap B_j$ ou $x \in A_j \cap B_i$. Suponhamos que $x \in A_i \cap B_j$. Visto que $A_i \leq A_j$, existe $y \in A_j \subseteq A_j \cup B_j$ tal que $x < y$, contradizendo a maximalidade de x .

O caso $x \in A_j \cap B_i$ conduz igualmente a uma contradição. Temos portanto que

$$(A_i \vee B_i) \cap (A_j \vee B_j) = \emptyset.$$

Atendendo a que $A_k \leq A_{k-1} \leq \dots \leq A_1$ e $B_k \leq B_{k-1} \leq \dots \leq B_1$ e que $\mathcal{A}(P)$ é um reticulado, temos

$$A_k \vee B_k \leq A_{k-1} \vee B_{k-1} \leq \dots \leq A_1 \vee B_1.$$

$(A_1 \vee B_1, \dots, A_k \vee B_k)$ forma a partição canónica de $A \vee B$.

Vejamos agora que $A \Delta B$ é união disjunta. Consideremos $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tais que $i \neq j$ e, sem perda de generalidade, $i > j$.

Seja $x \in (A_i \Delta B_i) \cap (A_j \Delta B_j)$. Como $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$, temos que $x \in (A_i \cup B_i) \setminus (A_i \vee B_i)$ ou $x \in (A_j \cup B_j) \setminus (A_j \vee B_j)$.

Suponhamos que $x \in (A_i \cup B_i) \setminus (A_i \vee B_i)$ e, sem perda de generalidade, $x \in A_i$.

Se $x \in (A_j \cup B_j) \setminus (A_j \vee B_j)$, visto que $A_i \cap A_j = \emptyset$, então $x \in B_j$. Como $B_j \leq A_j \vee B_j$, existe $y \in A_j \vee B_j$ tal que $x \leq y$. Porque $A_i \cap A_j = \emptyset$, concluímos que $x = y$. Então, $x \in A_j \vee B_j$, o que constitui uma contradição.

Se $x \in (A_j \cap B_j)$, ter-se-á $x \in A_i \cap A_j = \emptyset$.

Concluímos portanto que $(A_i \Delta B_i) \cap (A_j \Delta B_j) = \emptyset$. ■

Embora $(A_1 \vee B_1, \dots, A_k \vee B_k)$ constitua a partição canónica de $A \vee B$, o mesmo não se verifica com $A \Delta B$, nem com $A \wedge^* B$, como se pode comprovar através do exemplo seguinte.

Exemplo 2.31 Seja P o conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse está representado na figura 2.3.

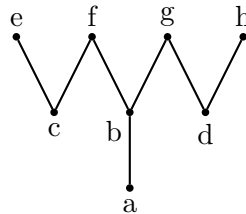


Figura 2.3: Conjunto parcialmente ordenado P

Consideremos as 2-famílias de P , $A = \{e, f, b, d\}$ e $B = \{g, h, c, b\}$. É claro que $A_1 = \{e, f, d\}$, $A_2 = \{b\}$, $B_1 = \{g, h, c\}$ e $B_2 = \{b\}$. Temos que

$$A \Delta B = A \wedge^* B = \{b, c, d\},$$

cujas partições canónicas são dadas por $(\{b, c, d\}, \emptyset)$. No entanto,

$$(A_1 \Delta B_1, A_2 \Delta B_2) = (\{c, d\}, \{b\}) \quad \text{e} \quad (A_1 \wedge B_1, A_2 \wedge B_2) = (\{b, c, d\}, \{b\}).$$

Corolário 2.32 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. $\mathcal{A}_k(P)$ é um reticulado. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$, o supremo de A e B é dado por $A \vee B$.*

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$. Vejamos que $A \vee B$ é o supremo de A e B em $\mathcal{A}_k(P)$.

Seja $(A_1 \vee B_1, \dots, A_k \vee B_k)$ a partição canónica de $A \vee B$. Visto que $\mathcal{A}(P)$ é um reticulado, então, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, temos $A_i \leq A_i \vee B_i$ e $B_i \leq A_i \vee B_i$. Atendendo à definição de \leq_k , concluímos que $A \leq_k A \vee B$ e $B \leq_k A \vee B$.

Seja $X \in \mathcal{A}_k(P)$ tal que $X \geq_k A, B$. Se (X_1, \dots, X_k) for a partição canónica de X , então $X_i \geq A_i, B_i$, para cada $i = 1, \dots, k$.

Em $\mathcal{A}(P)$, temos que $X_i \geq A_i \vee B_i$, donde $X \geq_k A \vee B$ em $\mathcal{A}_k(P)$.

Por outro lado, $\mathcal{A}_k(P)$ possui elemento mínimo, pois \emptyset é uma k -família tal que $\emptyset \leq A, \forall A \in \mathcal{A}_k(P)$. Concluímos que $\mathcal{A}_k(P)$ é um reticulado. ■

No que se segue, demonstramos que $\mathcal{S}_k(P)$ é um subreticulado de $\mathcal{A}_k(P)$, alcançando deste modo a pretendida generalização do teorema 2.25. Começamos por provar resultados acerca de k -famílias que correspondem aos lemas 2.22, 2.23 e 2.24 para anticadeias.

Corolário 2.33 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$. Então*

$$|A| + |B| = |A \vee B| + |A \Delta B|.$$

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ com partições canônicas $(A_1, \dots, A_k), (B_1, \dots, B_k)$, respectivamente. É claro que $|A| = \sum_{i=1}^k |A_i|$ e $|B| = \sum_{i=1}^k |B_i|$. Por outro lado,

$$A \vee B = \bigcup_{i=1}^k A_i \vee B_i \quad \text{e} \quad A \Delta B = \bigcup_{i=1}^k A_i \Delta B_i.$$

Tratando-se de uniões disjuntas, como foi verificado no lema 2.30, temos

$$|A \vee B| = \sum_{i=1}^k |A_i \vee B_i| \quad \text{e} \quad |A \Delta B| = \sum_{i=1}^k |A_i \Delta B_i|.$$

Pelo lema 2.22, para $i \in \{1, \dots, k\}$, temos $|A_i| + |B_i| = |A_i \vee B_i| + |A_i \Delta B_i|$. Somando componente a componente, concluímos o resultado. ■

Corolário 2.34 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e $B \in \mathcal{A}_k(P)$, então*

$$|A \vee B| \geq |B| \quad \text{e} \quad |A \Delta B| \geq |B|.$$

Demonstração.

Seja $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e $B \in \mathcal{A}_k(P)$. Então $|A| = d_k(P)$. Pelo corolário 2.33, temos

$$|A| + |B| = |A \vee B| + |A \Delta B|.$$

Então $|A \vee B| = d_k(P) + (|B| - |A \Delta B|)$. Visto que $A \vee B \in \mathcal{A}_k(P)$, temos $|A \vee B| \leq d_k(P)$. Então $|B| - |A \Delta B| \leq 0$, ou seja, $|A \Delta B| \geq |B|$.

De modo análogo se verifica que $|A \vee B| \geq |B|$. ■

Corolário 2.35 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $A, B \in \mathcal{S}_k(P)$, então*

$$|A \vee B| = |A \Delta B| = d_k(P).$$

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{S}_k(P)$. Então $|A| = |B| = d_k(P)$. Pelo corolário 2.34, temos

$$|A \vee B|, |A \Delta B| \geq |B| = d_k(P).$$

Como $A \vee B, A \Delta B \in \mathcal{A}_k(P)$, temos também

$$|A \vee B|, |A \Delta B| \leq d_k(P).$$

Concluimos que $|A \vee B| = |A \Delta B| = d_k(P)$ e portanto $A \vee B, A \Delta B \in \mathcal{S}_k(P)$. ■

O corolário 2.35 mostra que $\mathcal{S}_k(P)$ é fechado para as operações \vee e Δ . No entanto, desconhecemos se $\mathcal{S}_k(P)$ admite elemento mínimo, pelo que não podemos deduzir desde já que $\mathcal{S}_k(P)$ é um reticulado.

Contrariamente ao que seria de esperar, o ínfimo de duas k -famílias pode não ser $A \Delta B$ ou $A \wedge^* B$, como se pode confirmar através do exemplo seguinte.

Exemplo 2.36 Seja $P = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ o conjunto parcialmente ordenado representado na figura 2.4.

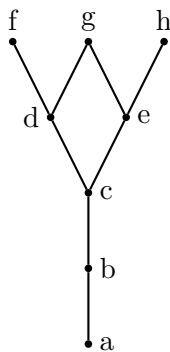


Figura 2.4: Conjunto parcialmente ordenado P

Consideremos as 2-famílias de P , $A = \{e, h\}$ e $B = \{d, f\}$.

Como $A_1 = \{h\}$, $A_2 = \{e\}$, $B_1 = \{f\}$ e $B_2 = \{d\}$, é possível verificar que $A \Delta B = \emptyset$ e $A \wedge^* B = \{c\}$ e que $A \wedge B = \{b, c\}$.

No intuito de demonstrar que $(\mathcal{S}_k(P), \leq_k)$ é subreticulado de $\mathcal{A}_k(P)$, apresentamos uma descrição do ínfimo de duas k -famílias.

Definição 2.37 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Para cada $M \in \mathcal{A}(P)$, definimos

$$M^* = \text{Max}\{\{x \in P : x < m \text{ para algum } m \in M\}\} = \overline{M} \setminus M.$$

Não é difícil verificar que M^* é uma anticadeia em P . Nesse sentido, podemos considerar a aplicação $M \mapsto M^*$ de $\mathcal{A}(P)$ em $\mathcal{A}(P)$, da qual vamos demonstrar algumas propriedades.

Lema 2.38 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e $M, N \in \mathcal{A}(P)$.*

- (i) *Se $M \leq N$, então $M^* \leq N^*$.*
- (ii) *Se $M \leq N$, então $M \cap N = \emptyset$ se e só se $M \leq N^*$.*
- (iii) *Se $M \leq N$, então $M \setminus N \subseteq M \wedge N^*$.*

Demonstração.

(i) Sejam $M, N \in \mathcal{A}(P)$ tais que $M \leq N$. Se $x \in M^*$, então $x < m$ para algum $m \in M$. Visto que $M \leq N$, podemos considerar $n \in N$ tal que $x < m \leq n$. Temos claramente que existe $y \in \text{Max}[\{z : z < n \text{ para algum } n \in N\}] = N^*$ tal que $x \leq y$. Concluimos que $M^* \leq N^*$.

(ii) Sejam $M, N \in \mathcal{A}(P)$ tais que $M \leq N$.

Suponhamos que $M \cap N = \emptyset$. Se $x \in M$, então $x \leq n$ para algum $n \in N$. Temos que $x < n$ pois, caso $x = n$, $x \in M \cap N = \emptyset$.

Mas então $x \in \{y \in P : y < n \text{ para algum } n \in N\}$ e portanto $x \leq y \in N^*$. Concluimos que $M \leq N^*$.

Suponhamos agora que $M \leq N^*$. Seja $x \in M \cap N$. Como $x \in M \leq N^*$, $x \leq y$ para algum $y \in N^*$. Então $x \leq y < n \in N$ com $x, n \in N$. Sendo N é uma anticadeia, tal constitui uma contradição.

(iii) Sejam $M, N \in \mathcal{A}(P)$ tais que $M \leq N$. Se $x \in M \setminus N$ então $x \in \overline{M}$. Por hipótese, existe $n \in N$ tal que $x \leq n$. Como $x \notin N$, $x < n$. Mas então $x \in \overline{M} \cap \overline{N^*}$.

Seja $z \in \overline{M} \cap \overline{N^*}$ tal que $x \leq z$. Como $z \in \overline{M}$, $x \leq z \leq m \in M$. Visto que $M \in \mathcal{A}(P)$, concluimos que $x = m = z$. Então $x \in \text{Max}[\overline{M} \cap \overline{N^*}] = M \wedge N^*$. ■

Definição 2.39 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $\alpha = (A_1, \dots, A_k)$ for um k -uplo de anticadeias de P , definimos a sucessão $\tilde{\alpha} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k)$ por*

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= A_1, \\ \tilde{A}_2 &= A_2 \wedge (\tilde{A}_1)^*, \\ &\dots \\ \tilde{A}_k &= A_k \wedge (\tilde{A}_{k-1})^*.\end{aligned}$$

Se $\alpha = (A_1, \dots, A_k)$ for um k -uplo de anticadeias de P , temos claramente que cada $\tilde{A}_i \in \mathcal{A}(P)$. Atendendo ao lema 2.38, $\tilde{\alpha} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k)$ satisfaz

(i) $\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \emptyset$, se $i \neq j$;

(ii) $\tilde{A}_k \leq \tilde{A}_{k-1} \leq \dots \leq \tilde{A}_1$.

Concluimos portanto que o k -uplo $\tilde{\alpha} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k)$ é a partição canónica da k -família $\bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_i$.

Consideremos o conjunto $[\mathcal{A}(P)]^k$ dos k -uplos de anticadeias munido da relação de ordem induzida pela relação $\leq_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}(P)$ definida componente a componente. Como $\mathcal{A}(P)$ é um reticulado, $[\mathcal{A}(P)]^k$ também é um reticulado.

Proposição 2.40 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. A aplicação $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ é um anti-operador de fecho em $[\mathcal{A}(P)]^k$. Uma sucessão $\alpha \in [\mathcal{A}(P)]^k$ é um elemento fechado de $[\mathcal{A}(P)]^k$ se e só se for uma partição canónica. O reticulado dos fechados de $[\mathcal{A}(P)]^k$ é isomorfo a $\mathcal{A}_k(P)$.*

Demonstração.

A demonstração do facto de $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ser um anti-operador de fecho em $[\mathcal{A}(P)]^k$ não apresenta qualquer dificuldade. Provemos as restantes afirmações.

Caracterizemos os elementos fechados de $[\mathcal{A}(P)]^k$.

Suponhamos que $\alpha = (A_1, \dots, A_k) \in [\mathcal{A}(P)]^k$ é um elemento fechado, ou seja, $\tilde{\alpha} = \alpha$. Então, em particular, $\tilde{A}_i = A_i$, para cada $i = 1, \dots, k$.

Foi observado anteriormente que $\tilde{\alpha} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k)$ é a partição canónica da k -família $\bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_i$, pelo que α é uma partição canónica.

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha = (A_1, \dots, A_k) \in [\mathcal{A}(P)]^k$ é uma partição canónica. Então, α verifica $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $A_k \leq A_{k-1} \leq \dots \leq A_1$.

Por definição, $\tilde{A}_1 = A_1$.

Do mesmo modo, $\tilde{A}_2 = A_2 \wedge \tilde{A}_1^* = A_2 \wedge A_1^*$. Como $A_2 \leq A_1$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, pela alínea (ii) do lema 2.38, $A_2 \leq A_1^*$. Mas então $\tilde{A}_2 = A_2 \wedge A_1^* = A_2$.

Iterando este processo, concluimos que $\tilde{A}_i = A_i$, para cada $i = 1, \dots, k$. Tal significa que $\tilde{\alpha} = \alpha$, ou seja, que α é um elemento fechado de $[\mathcal{A}(P)]^k$.

Sendo $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ um anti-operador de fecho, é bem conhecido que o conjunto dos elementos fechados de $[\mathcal{A}(P)]^k$ forma um sistema de fecho sobre $[\mathcal{A}(P)]^k$ e portanto um reticulado. Vejamos que este último é isomorfo a $\mathcal{A}_k(P)$.

No lema 2.27, foi visto que, a cada k -família $A \in \mathcal{A}_k(P)$ corresponde uma única partição canónica $(A_1, \dots, A_k) \in [\mathcal{A}(P)]^k$. Nesse sentido, consideramos a aplicação $A \mapsto (A_1, \dots, A_k)$ do reticulado $\mathcal{A}_k(P)$ no reticulado das partições canónicas de $[\mathcal{A}(P)]^k$. Trata-se claramente de uma aplicação bijectiva cuja inversa é dada por

$$\alpha = (A_1, \dots, A_k) \mapsto \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

A definição da ordem \leq_k em $\mathcal{A}_k(P)$ permite concluir que esta aplicação preserva a ordem.

Relativamente à aplicação inversa, se $\alpha = (A_1, \dots, A_k)$ e $\beta = (B_1, \dots, B_k)$ forem partições canónicas tais que $\alpha \leq \beta$, então α e β constituem as partições canónicas respectivas das k -famílias $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ e $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Por definição,

$$A \leq_k B.$$

Concluimos que estamos na presença de um isomorfismo de ordem, ou seja, que $\mathcal{A}_k(P)$ é isomorfo ao reticulado das partições canónicas de $[\mathcal{A}(P)]^k$. ■

O isomorfismo referido na proposição 2.40 entre $\mathcal{A}_k(P)$ e o reticulado das partições canónicas de $[\mathcal{A}(P)]^k$ permite apresentar uma descrição completa do ínfimo de duas k -famílias.

Teorema 2.41 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$, o ínfimo de A e B em $\mathcal{A}_k(P)$ é dado por*

$$A \wedge B = \bigcup_{i=1}^k \widetilde{A_i \wedge B_i}. \quad (2.1)$$

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ com partições canónicas $\alpha = (A_1, \dots, A_k)$, $\beta = (B_1, \dots, B_k)$ respectivamente. No reticulado $[\mathcal{A}(P)]^k$, o ínfimo de α e β é dado por

$$\alpha \wedge \beta = (A_1 \wedge B_1, \dots, A_k \wedge B_k).$$

Visto α e β serem elementos fechados de $[\mathcal{A}(P)]^k$, o anti-operador de fecho definido na proposição 2.40 permite afirmar que

$$\widetilde{\alpha \wedge \beta} = (\widetilde{A_1 \wedge B_1}, \dots, \widetilde{A_k \wedge B_k})$$

representa o ínfimo de α e β no reticulado dos fechados de $[\mathcal{A}(P)]^k$.

Atendendo ao isomorfismo de ordem entre o reticulado dos fechados de $[\mathcal{A}(P)]^k$ e $\mathcal{A}_k(P)$, temos que o ínfimo de A e B em $\mathcal{A}_k(P)$ é $\bigcup_{i=1}^k \widetilde{A_i \wedge B_i}$. ■

Exemplo 2.42 Retomando o exemplo 2.36, podemos agora confirmar através da expressão 2.1 que $A \wedge B$ é efectivamente igual a $\{b, c\}$.

Com efeito, se $A = \{h, e\}$ e $B = \{d, f\}$, vimos que $A_1 = \{h\}$, $A_2 = \{e\}$, $B_1 = \{f\}$ e $B_2 = \{d\}$. Então, $A_1 \wedge B_1 = \{c\}$ e $A_2 \wedge B_2 = \{c\}$ e portanto $A \wedge B = \{c\} \cup \{b\} = \{c, b\}$.

Lema 2.43 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Seja (A_1, \dots, A_k) uma sucessão de anticadeias de P que satisfaz $A_k \leq A_{k-1} \leq \dots \leq A_1$. Então*

$$\bigcup_{i=1}^k A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_i.$$

Demonstração.

Seja (A_1, \dots, A_k) uma sucessão de anticadeias em P nas condições do enunciado.

Se $x \in \bigcup_{i=1}^k A_i$, então existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in A_i$. Como $A_i \leq A_1 = \tilde{A}_1$, temos $x \leq y \in \tilde{A}_1$. Seja $j \in \{1, \dots, k\}$ o maior índice tal que $x \leq y$ para algum $y \in \tilde{A}_j$. Vejamos que $x \in \tilde{A}_j$.

Se $x \notin \tilde{A}_j$, então $x < y$ para algum $y \in \tilde{A}_j$. Sendo $\tilde{A}_j = A_j \wedge (\tilde{A}_{j-1})^*$, existe $z \in (\tilde{A}_j)^*$ tal que $x \leq z$. Como $x \notin A_j \geq \tilde{A}_j$, também temos que $x \leq w$ para algum $w \in A_{j+1}$. Mas então $x \leq A_{j+1} \wedge (\tilde{A}_j)^* = \tilde{A}_{j+1}$, o que contradiz a maximalidade de j . Concluimos que $x \in \tilde{A}_j$. ■

O corolário seguinte clarifica a relação entre Δ, \wedge^* e \wedge em $\mathcal{A}_k(P)$.

Corolário 2.44 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$, então*

$$A \Delta B \subseteq A \wedge^* B \subseteq A \wedge B.$$

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ com partições canônicas $(A_1, \dots, A_k), (B_1, \dots, B_k)$ respectivamente. Pelo lema 2.21, sabemos que, para $i \in \{1, \dots, k\}$, $A_i \Delta B_i \subseteq A_i \wedge B_i$. Mas então, temos que

$$A \Delta B = \bigcup_{i=1}^k A_i \Delta B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i \wedge B_i = A \wedge^* B.$$

Por outro lado, não é difícil verificar que $(A_1 \wedge B_1, \dots, A_k \wedge B_k)$ verifica

$$A_k \wedge B_k \leq A_{k-1} \wedge B_{k-1} \leq \dots \leq A_1 \wedge B_1.$$

Pelo lema 2.43, concluímos que

$$A \wedge^* B = \bigcup_{i=1}^k A_i \wedge B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k \widetilde{A_i \wedge B_i} = A \wedge B.$$

■

Teorema 2.45 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $A, B \in \mathcal{S}_k(P)$, então*

$$A \Delta B = A \wedge^* B = A \wedge B.$$

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{S}_k(P)$. Então $|A| = |B| = d_k(P)$. O corolário 2.35 assegura que $|A \Delta B| = d_k(P)$. Ora, pelo corolário 2.44, temos que

$$A \Delta B \subseteq A \wedge^* B \subseteq A \wedge B.$$

Sendo $d_k(P)$ a cardinalidade máxima de uma k -família, temos o resultado. ■

Corolário 2.46 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. $\mathcal{S}_k(P)$ é um subreticulado de $\mathcal{A}_k(P)$. Em particular, $\mathcal{S}_k(P)$ é um reticulado.*

Demonstração.

Sejam $A, B \in \mathcal{S}_k(P)$. Pelo corolário 2.35, temos que $A \vee B, A \Delta B \in \mathcal{S}_k(P)$. Além disso, foi demonstrado no teorema 2.45 que $A \wedge B = A \Delta B$.

Concluímos que $\mathcal{S}_k(P)$ é fechado para as operações \vee e \wedge e logo $\mathcal{S}_k(P)$ é um subreticulado de $\mathcal{A}_k(P)$. ■

2.3 \mathcal{C} -partições k -saturadas

O principal objectivo desta secção consiste na demonstração do teorema de Greene-Kleitman e do teorema 2.14.

Ao longo do texto, seguimos essencialmente [16].

No que se segue, P é um conjunto parcialmente ordenado finito e k é um inteiro positivo.

Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$ uma \mathcal{C} -partição de P . Para cada inteiro positivo k , definimos α_k como sendo o número de parcelas de \mathcal{C} de cardinalidade superior ou igual a k e T_k como o conjunto dos elementos de P que pertencem a parcelas de \mathcal{C} de cardinalidade inferior a k .

Não sendo relevante a ordem subjacente às parcelas da \mathcal{C} -partição, admitimos sem perda de generalidade que $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\alpha_k}$ são as parcelas de \mathcal{C} com k ou mais elementos.

Observemos que uma \mathcal{C} -partição \mathcal{C}' obtida a partir de \mathcal{C} e constituída pelas α_k parcelas de \mathcal{C} de cardinalidade superior ou igual a k , juntamente com os elementos de T_k considerados como cadeias de cardinalidade 1, constitui uma \mathcal{C} -partição que satisfaz $\beta_k(\mathcal{C}') = \beta_k(\mathcal{C})$.

Em particular, se \mathcal{C} for k -saturada então \mathcal{C}' também é k -saturada. Denotamos a \mathcal{C} -partição \mathcal{C}' por $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\alpha_k}; T_k)$. Temos claramente que $\beta_k(\mathcal{C}') = |T_k| + k\alpha_k$ e portanto

$$\beta_k(\mathcal{C}) = |T_k| + k\alpha_k.$$

Sendo um dos objectivos desta secção demonstrar a existência de \mathcal{C} -partições de P k -saturadas, começamos por apresentar uma condição necessária e suficiente para que uma \mathcal{C} -partição de P seja k -saturada.

Lema 2.47 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Seja \mathcal{C} uma \mathcal{C} -partição de P com α_k parcelas de cardinalidade superior ou igual a k e seja T_k o conjunto dos elementos de P que pertencem a parcelas de \mathcal{C} de cardinalidade inferior a k . Então \mathcal{C} é k -saturada se e só se*

$$d_k(P) = |T_k| + k\alpha_k.$$

Demonstração.

Pelas observações anteriores, para qualquer \mathcal{C} -partição de P , \mathcal{C} , temos que

$$\beta_k(\mathcal{C}) = |T_k| + k\alpha_k.$$

Concluimos portanto que \mathcal{C} é k -saturada se e só se $d_k(P) = |T_k| + k\alpha_k$. ■

Recordemos que $\Delta_k(P)$ foi definido como $\Delta_k(P) = d_k(P) - d_{k-1}(P)$. Além disso, $\Delta_1(P) = d_1(P)$ pois assumimos que $d_0(P) = 0$.

Um dos objectivos da presente secção consiste na demonstração de que a sucessão $\Delta(P) = (\Delta_1(P), \dots, \Delta_c(P))$ forma uma partição do inteiro $|P|$. Por esta razão, não podemos assumir desde já que

$$\Delta_1(P) \geq \dots \geq \Delta_c(P).$$

Por outro lado, observemos que $\Delta_k(P)$ não representa o número máximo de elementos que se pode adicionar a uma $(k-1)$ -família de P de cardinalidade máxima de modo a obter uma k -família de cardinalidade máxima. O exemplo que se segue mostra que tal ideia se revela falsa.

Exemplo 2.48 [16] Seja P o conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse está representado na figura 2.5.

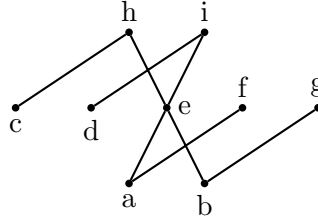


Figura 2.5: Conjunto parcialmente ordenado P

P contém uma única anticadeia de cardinalidade máxima, $\{c, d, e, f, g\}$, assim como uma única 2-família de cardinalidade máxima, $\{a, b, c, d, f, g, h, i\}$. Temos portanto que $d_1(P) = 5$, $d_2(P) = 8$ e $\Delta_2(P) = 8 - 5 = 3$.

No entanto, não é possível adicionar 3 elementos a uma anticadeia de cardinalidade máxima de P de modo a formar uma 2-família de cardinalidade máxima.

Lema 2.49 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Seja \mathcal{C} uma \mathcal{C} -partição de P k -saturada e α_k o número de parcelas de \mathcal{C} de cardinalidade superior ou igual a k . Então*

$$\Delta_{k+1}(P) \leq \alpha_k \leq \Delta_k(P).$$

Demonstração.

Pelo lema 2.47, se $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\alpha_k}; T_k)$ é uma \mathcal{C} -partição de P k -saturada, temos que $d_k(P) = |T_k| + k\alpha_k$.

Por outro lado, considerando as definições de α_k e de T_k , temos

$$\beta_{k-1}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \min\{|\mathcal{C}_i|, (k-1)\} = |T_k| + (k-1)\alpha_k,$$

$$\beta_{k+1}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \min\{|\mathcal{C}_i|, (k+1)\} = |T_k| + (k+1)\alpha_k.$$

Sabemos ainda que $d_{k-1}(P) \leq \beta_{k-1}(\mathcal{C})$ e $d_{k+1}(P) \leq \beta_{k+1}(\mathcal{C})$, donde

$$d_{k-1}(P) \leq |T_k| + (k-1)\alpha_k \quad \text{e} \quad d_{k+1}(P) \leq |T_k| + (k+1)\alpha_k.$$

Mas então

$$\Delta_{k+1}(P) = d_{k+1}(P) - d_k(P) \leq |T_k| + (k+1)\alpha_k - |T_k| - k\alpha_k,$$

ou seja, $\Delta_{k+1}(P) \leq \alpha_k$ e

$$\Delta_k(P) = d_k(P) - d_{k-1}(P) \geq |T_k| + k\alpha_k - |T_k| - (k-1)\alpha_k,$$

ou seja, $\Delta_k(P) \geq \alpha_k$. Concluimos que $\Delta_{k+1}(P) \leq \alpha_k \leq \Delta_k(P)$. ■

Lema 2.50 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Seja \mathcal{C} uma \mathcal{C} -partição de P k -saturada.*

Se $\Delta_k(P) = \Delta_{k+1}(P)$, então \mathcal{C} é uma \mathcal{C} -partição de P $(k+1)$ -saturada.

Demonstração.

Se $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\alpha_k}; T_k)$ é uma \mathcal{C} -partição de P k -saturada e $\Delta_k(P) = \Delta_{k+1}(P)$, então, pelo lema anterior, $\Delta_k(P) = \Delta_{k+1}(P) = \alpha_k$. Por outro lado, pelo lema 2.47, temos que $d_k(P) = |T_k| + k\alpha_k$. Então

$$d_{k+1}(P) = d_k(P) + \Delta_{k+1}(P) = |T_k| + k\alpha_k + \Delta_{k+1}(P) = |T_k| + (k+1)\alpha_k.$$

Pela demonstração do lema 2.49, sabemos que $\beta_{k+1}(\mathcal{C}) = |T_k| + (k+1)\alpha_k$.

Então $d_{k+1}(P) = \beta_{k+1}(\mathcal{C})$, isto é, \mathcal{C} é uma \mathcal{C} -partição de P $(k+1)$ -saturada. ■

Lema 2.51 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Seja $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e (A_1, \dots, A_k) a partição canónica de A . Então, para cada $1 \leq i \leq k$,*

$$|A_i| \geq \Delta_k(P).$$

Demonstração.

Seja $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e (A_1, \dots, A_k) a partição canónica de A . Seja $i \in \{1, \dots, k\}$. Consideremos $A \setminus A_i$. Tratando-se da união disjunta de $k-1$ anticadeias, $A \setminus A_i$ forma uma $(k-1)$ -família de P . Naturalmente,

$$|A \setminus A_i| \leq d_{k-1}(P).$$

Então $|A| \leq d_{k-1}(P) + |A_i|$, ou ainda,

$$|A_i| \geq |A| - d_{k-1}(P) = d_k(P) - d_{k-1}(P) = \Delta_k(P).$$

■

O teorema que se segue constitui o argumento principal da demonstração da existência, para qualquer inteiro positivo k , de uma \mathcal{C} -partição de P k -saturada. Mais, este teorema de importância fulcral, permite demonstrar a existência de uma \mathcal{C} -partição k -saturada que é simultaneamente $(k+1)$ -saturada.

Teorema 2.52 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $\Delta_k(P) > \Delta_{k+1}(P)$, então existe $x \in P$ tal que*

- (i) *x é elemento maximal em toda a k -família de cardinalidade máxima;*
- (ii) *x pertence a toda a $(k+1)$ -família de cardinalidade máxima.*

Demonstração.

(i) Sejam A^+ e A^- os elementos máximo e mínimo do reticulado $\mathcal{S}_k(P)$, cujas partições canónicas são respectivamente (A_1^+, \dots, A_k^+) e (A_1^-, \dots, A_k^-) .

Seja $C = A_1^+ \cap A_1^-$. É claro que $C \in \mathcal{A}(P)$. Vejamos que $C \neq \emptyset$.

Se A_1^+ e A_1^- forem disjuntos, então $A^- \cup A_1^+$ é união disjunta de $k+1$ anticadeias e portanto uma $(k+1)$ -família de P .

Então, em particular, $|A^- \cup A_1^+| \leq d_{k+1}(P)$. Por outro lado,

$$|A^- \cup A_1^+| = |A^-| + |A_1^+| = d_k(P) + |A_1^+|.$$

Pelo lema 2.51, $|A_1^+| \geq \Delta_k(P)$ e, por hipótese, $\Delta_k(P) > \Delta_{k+1}(P)$, donde chegamos à seguinte contradição

$$d_{k+1}(P) \geq |A^- \cup A_1^+| \geq d_k(P) + \Delta_k(P) > d_k(P) + \Delta_{k+1}(P) = d_{k+1}(P).$$

Concluimos portanto que $C \neq \emptyset$.

Considerando a relação de ordem \leq_k definida no reticulado $\mathcal{S}_k(P)$, para cada $A \in \mathcal{S}_k(P)$, temos $A_1^- \leq_k A_1 \leq_k A_1^+$. Pela desigualdade anterior, $C \subseteq A_1$.

Visto que A_1 é formado pelos elementos de profundidade igual a 1, temos que todo o elemento de C é maximal em A .

(ii) À semelhança da alínea anterior, A^+ e A^- representam os elementos máximo e mínimo de $\mathcal{S}_k(P)$ e $C = A_1^+ \cap A_1^-$. Em (i), mostrámos que $C \neq \emptyset$.

A demonstração da alínea (ii) consiste na demonstração de 4 afirmações.

Afirmção 1. Se $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$, então $C \leq B_1$.

Demonstração da Afirmção 1.

Seja $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ com partição canónica (B_1, \dots, B_{k+1}) . Consideremos a anticadeia B_{k+1} . Seja $\hat{B} = B \setminus B_{k+1}$. Sendo \hat{B} união disjunta de k anticadeias, trata-se de uma k -família de P . Então, considerando o reticulado $\mathcal{A}_k(P)$, temos

$$A^+ \vee \hat{B} \in \mathcal{A}_k(P).$$

Como $|A^+| = d_k(P)$ então, pelo corolário 2.34, $|A^+ \vee \hat{B}| \geq |\hat{B}|$.

Se $|A^+ \vee \hat{B}| > |\hat{B}|$, então $(A^+ \vee \hat{B}) \cup B_{k+1}$ é uma $(k+1)$ -família de cardinalidade superior à de $\hat{B} \cup B_{k+1} = B$, o que constitui uma contradição. Concluimos que

$$|A^+ \vee \hat{B}| = |\hat{B}|.$$

Pelo corolário 2.33, temos que $|A^+| + |\hat{B}| = |A^+ \vee \hat{B}| + |A^+ \Delta \hat{B}|$.

Das igualdades anteriores, deduzimos que $|A^+ \Delta \hat{B}| = |A^+| = d_k(P)$ e logo

$$A^+ \Delta \hat{B} \in \mathcal{S}_k(P).$$

Pela demonstração da alínea (i), concluimos que $C \subseteq (A^+ \Delta \hat{B})_1$.

Por outro lado, $A^+ \Delta \hat{B} \subseteq A^+ \wedge \hat{B} \leq_k \hat{B}$ e portanto

$$C \subseteq (A^+ \Delta \hat{B})_1 \leq \hat{B}_1 \leq B_1.$$

Concluimos que $C \leq B_1$. □

Afirmção 2. Se $A^+ \leq_{k+1} B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ e $C \cap B_1 = \emptyset$, então $B \setminus B_1 \in \mathcal{S}_k(P)$ e $C \subseteq B_2$.

Demonstração da Afirmção 2.

Suponhamos que $A^+ \leq_{k+1} B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ e $C \cap B_1 = \emptyset$, onde (B_1, \dots, B_{k+1}) é a partição canónica de B .

Por hipótese, temos que $A_1^- \leq A_1^+ \leq B_1$. Como $C \cap B_1 = \emptyset$, deduzimos que

$$(A_1^- \setminus C) \cap B_1 = \emptyset.$$

Como $B_1 \cap A_1^- \subseteq (A_1^- \setminus C) \cap B_1$, então $B_1 \cap A_1^- = \emptyset$

Por outro lado, dado que $B \in \mathcal{S}_k(P)$, pelo lema 2.51, sabemos que

$$|B_1| \geq \Delta_{k+1}(P).$$

Das duas últimas obsevações, temos

$$|B_1 \cup A^-| = |B_1| + |A^-| \geq \Delta_{k+1}(P) + d_k(P) = d_{k+1}(P).$$

Sendo $B_1 \cup A^-$ uma k -família, concluímos que $B_1 \cup A^- \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ e também

$$|B_1| = |B_1 \cup A^-| - |A^-| = d_{k+1}(P) - d_k(P) = \Delta_{k+1}(P).$$

Mas então temos que $|B \setminus B_1| = |B| - |B_1| = d_{k+1}(P) - \Delta_{k+1}(P) = d_k(P)$, o que significa que $B \setminus B_1 \in \mathcal{S}_k(P)$. Pela afirmação 1, concluímos que $C \subseteq B_2$. \square

Afirmação 3. Se $C \cap B_1 = \emptyset$, $\forall B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$, então $C \subseteq B_2$, $\forall B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$.

Demonstração da Afirmação 3.

Seja $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ com partição canónica (B_1, \dots, B_{k+1}) . Seja $B' = B \vee A^+$.

Temos claramente que $B' \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Então, por hipótese, $C \cap B'_1 = \emptyset$.

Por outro lado, pela definição de B' , temos que $A^+ \leq_{k+1} B'$. Pela afirmação 2, deduzimos que

$$C \subseteq B'_2.$$

Ora, $B'_2 = (B \vee A^+)_2 = B_2 \vee A_2^+$.

Como $C \cap A_2^+ = \emptyset$, concluímos que $C \subseteq B_2$. \square

Afirmação 4. Se $C \cap B_1 \neq \emptyset$ para algum $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$, seja B^* o elemento de $\mathcal{S}_{k+1}(P)$ maximal em relação à ordem \leq_{k+1} para esta propriedade. Seja $C_0 = C \cap B^*_1$. Então, para cada $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$, $C_0 \subseteq B_1$ ou $C_0 \subseteq B_2$.

Demonstração da Afirmação 4.

Suponhamos que $C \cap B'_1 \neq \emptyset$ para algum $B' \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ e seja B^* maximal em $\mathcal{S}_{k+1}(P)$ com esta propriedade.

Consideremos $A^+ \vee B^*$. Temos claramente que $A^+ \vee B^* \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Vejamos que $A^+ \leq_{k+1} B^*$.

Como $C \subseteq A_1^+$ por (i) e $C \cap B^*_1 \neq \emptyset$ por definição de B^* , então

$$C \cap (A^+ \vee B^*)_1 = C \cap (A_1^+ \vee B^*_1) \neq \emptyset.$$

Dado que $B^* \leq_{k+1} A^+ \leq_{k+1} B^*$, então, pela maximalidade de B^* , temos

$$A^+ \vee B^* = B^*.$$

Concluimos portanto que $A^+ \leq_{k+1} B^*$.

Seja $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Se $B \leq_{k+1} B^*$, então, pela afirmação 1, $C \leq B_1 \leq B^*_1$.

Definindo $C_0 = C \cap B^*_1$, deduzimos que $C_0 \subseteq B_1$.

Se $B \not\leq_{k+1} B^*$, então $B \vee B^* >_{k+1} B^*$. Como $B \vee B^* \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$, pela maximalidade de B^* , então

$$C \cap (B \vee B^*)_1 = \emptyset$$

Foi visto que $A^+ \leq B^*$, donde, pela afirmação 2, concluimos que

$$C \subseteq (B \vee B^*)_2 = B_2 \vee B^*_2.$$

Por outro lado, como $C_0 = C \cap B^*_1$ e $C_0 \subseteq B^*_1$, então $C_0 \cap B^*_2 = \emptyset$. Concluimos que $C_0 \subseteq B_2$. □

Podemos agora finalizar a demonstração da alínea (ii).

Suponhamos que $C \cap B'_1 = \emptyset$, $\forall B' \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Dado $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$, pela afirmação 3, concluimos que $C \subseteq B_2$.

Suponhamos que existe $B' \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ tal que $C \cap B'_1 \neq \emptyset$. Considerando B^* definido como na afirmação 4 e $C_0 = C \cap B^*_1$, temos, para qualquer $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$, $C_0 \subseteq B_1$ ou $C_0 \subseteq B_2$. ■

Estamos em condições de demonstrar que num conjunto parcialmente ordenado finito, para qualquer inteiro positivo k , existem \mathcal{C} -partições simultaneamente k -saturadas e $(k+1)$ -saturadas. Este teorema de importância fulcral implica claramente o teorema de Greene-Kleitman. No entanto, estabelece uma propriedade mais geral a que voltaremos no capítulo 5.

Teorema 2.53 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Existe uma \mathcal{C} -partição de P simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada.*

Demonstração.

A demonstração é por indução em k e em $|P|$.

Se $k = 1$, o teorema de Dilworth assegura a existência de uma partição k -saturada, para qualquer $|P|$.

Seja $k > 1$. Admitimos a existência de uma \mathcal{C} -partição \mathcal{C} de P k -saturada e provamos que existe uma \mathcal{C} -partição de P que é simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada.

Pelo lema 2.49, podemos assumir que $\Delta_k(P) \geq \Delta_{k+1}(P)$.

Se $\Delta_k(P) = \Delta_{k+1}(P)$, então, pelo lema 2.50, a \mathcal{C} -partição \mathcal{C} é $(k+1)$ -saturada. Suponhamos que $\Delta_k(P) > \Delta_{k+1}(P)$. Pelo teorema 2.52, existe um elemento $x \in P$ que é maximal em todas as k -famílias de P de cardinalidade máxima e pertence a todas as $(k+1)$ -famílias de P de cardinalidade máxima.

Consideremos $P \setminus \{x\}$.

O facto de x pertencer a todos os elementos de $\mathcal{S}_k(P)$ e a todos os elementos de $\mathcal{S}_{k+1}(P)$ implica que

$$d_k(P \setminus \{x\}) = d_k(P) - 1 \quad \text{e} \quad d_{k+1}(P \setminus \{x\}) = d_{k+1}(P) - 1.$$

Verifiquemos a primeira igualdade. A segunda demonstra-se de modo análogo. Seja $A \in \mathcal{S}_k(P)$. Então $x \in A$ e $A \setminus \{x\}$ é uma k -família ou uma $(k-1)$ -família de $P \setminus \{x\}$. Em ambas as situações, temos

$$|A \setminus \{x\}| = d_k(P) - 1 \leq d_k(P \setminus \{x\}).$$

Suponhamos que $d_k(P \setminus \{x\}) > d_k(P) - 1$. Seja $B \in \mathcal{S}_k(P \setminus \{x\})$. Então $|B| = d_k(P \setminus \{x\})$. Dado que $P \setminus \{x\} \subseteq P$, B é uma k -família de P . Então $|B| \leq d_k(P)$. Como $|B| = d_k(P \setminus \{x\}) > d_k(P) - 1$, temos $|B| = d_k(P)$. Mas tal é uma contradição pois $x \notin B$ e $B \in \mathcal{S}_k(P)$. Concluimos que

$$d_k(P \setminus \{x\}) = d_k(P) - 1.$$

Por hipótese de indução, seja $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_n)$ uma \mathcal{C} -partição de $P \setminus \{x\}$ simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada. \mathcal{C}' verifica as igualdades:

$$d_k(P) - 1 = \sum_{i=1}^n \min\{|\mathcal{C}'_i|, k\},$$

$$d_{k+1}(P) - 1 = \sum_{i=1}^n \min\{|\mathcal{C}'_i|, (k+1)\}.$$

Definindo $\mathcal{C}'' = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_n)$ com $\mathcal{C}_0 = \{x\}$, obtemos uma \mathcal{C} -partição de P que satisfaz

$$\beta_k(\mathcal{C}'') = d_k(P) \quad \text{e} \quad \beta_{k+1}(\mathcal{C}'') = d_{k+1}(P).$$

Como pretendido, \mathcal{C}'' é uma \mathcal{C} -partição de P simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada. ■

Embora o teorema 2.53 possa sugeri-lo, nem sempre é possível encontrar uma \mathcal{C} -partição de P que seja k -saturada em simultâneo para todo o inteiro positivo k . Este facto pode ser confirmado pelo exemplo que se segue.

Exemplo 2.54 Seja $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ o conjunto parcialmente ordenado representado na figura 2.6.

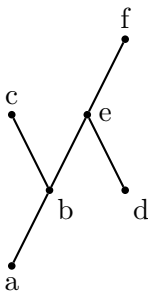


Figura 2.6: Conjunto parcialmente ordenado P

Temos que $d_1(P) = 2$, $d_2(P) = 4$, $d_3(P) = 5$ e $d_4(P) = 6 = |P|$.

P tem uma única \mathcal{C} -partição com 2 parcelas $\mathcal{C} = (\{a, b, c\}, \{d, e, f\})$. \mathcal{C} é 1-saturada e 2-saturada mas não é 3-saturada.

A \mathcal{C} -partição de P $\mathcal{C}' = (\{a, b, e, f\}, \{c, d\})$ é 2-saturada e 3-saturada mas não é 1-saturada. P não admite nenhuma \mathcal{C} -partição que seja simultaneamente k -saturada, para $k = 1, 2, 3, 4$.

O teorema de Greene-Kleitman e o facto de $\Delta(P)$ constituir uma partição do inteiro $|P|$ são agora simples consequências do teorema 2.53. Terminamos esta secção com a demonstração dos mesmos.

Teorema 2.7 (Greene-Kleitman) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja k um inteiro positivo. Então*

$$d_k(P) = \min\{\beta_k(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \overline{\mathcal{C}(P)}\}.$$

Demonstração.

Seja k um inteiro positivo. Para qualquer \mathcal{C} -partição de P , temos

$$d_k(P) \leq \beta_k(\mathcal{C}).$$

Pelo teorema 2.53, existe uma \mathcal{C} -partição \mathcal{C}' de P que é k -saturada, ou seja, que verifica $d_k(P) = \beta_k(\mathcal{C}')$. Concluimos que $d_k(P) = \min\{\beta_k(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \overline{\mathcal{C}(P)}\}$. ■

Teorema 2.14 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Se c denota a cardinalidade máxima de uma cadeia em P , então*

$$(i) \quad \Delta_1(P) + \dots + \Delta_c(P) = |P|;$$

$$(ii) \quad \Delta_1(P) \geq \dots \geq \Delta_c(P).$$

Demonstração.

A afirmação (i) é óbvia. Nas condições do enunciado, seja $k \in \{1, \dots, c - 1\}$. Pelo teorema 2.53, existe uma \mathcal{C} -partição de P k -saturada. Então, pelo lema 2.49, temos

$$\Delta_k(P) \geq \Delta_{k+1}(P).$$

■

2.4 Problema dual

Em 1971, L. Mirsky [23] demonstra que o teorema de Dilworth permanece verdadeiro se se inverter o papel das cadeias com o das anticadeias. Este resultado sugere a C. Greene [17] que o dual do teorema de Greene-Kleitman também é verdadeiro.

Nesta secção, mostramos que, num conjunto parcialmente ordenado P finito, para qualquer inteiro positivo k , existe uma \mathcal{A} -partição de P simultaneamente k -saturada e $(k + 1)$ -saturada. Debruçamo-nos ainda sobre a sucessão $\widehat{\Delta}(P)$ e demonstramos que se trata de uma partição de $|P|$. No âmbito desta demonstração, deduzimos uma relação entre esta partição e a partição $\Delta(P)$.

Ao longo da secção, seguimos [17].

Doravante, P denota um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. À semelhança do que fizemos para \mathcal{C} -partições de P , introduzimos alguma notação relativa a \mathcal{A} -partições.

Se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s)$ for uma \mathcal{A} -partição de P e k um inteiro positivo, definimos α_k como sendo o número de parcelas de \mathcal{A} de cardinalidade superior ou igual a k e R_k como o conjunto dos elementos de P que pertencem a parcelas de \mathcal{A} de cardinalidade inferior a k .

Admitindo, sem perda de generalidade, que $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{\alpha_k}$ são as parcelas de \mathcal{A} de cardinalidade superior ou igual a k , denotamos por $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{\alpha_k}; R_k)$ a

\mathcal{A} -partição de P constituída pelas α_k anticadeias de \mathcal{A} de cardinalidade superior ou igual a k e os elementos de R_k considerados como anticadeias singulares.

Se \mathcal{A} for k -saturada, então $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{\alpha_k}; \mathcal{R}_k)$ também é k -saturada.

Recordemos ainda que $\widehat{\Delta}_k(P)$ foi definido por $\widehat{\Delta}_k(P) = \hat{d}_k(P) - \hat{d}_{k-1}(P)$. Um dos objectivos desta secção consiste em estabelecer uma relação entre a sucessão $\widehat{\Delta}(P)$ e a partição $\Delta(P)$. Nesse sentido, consideremos a partição conjugada de $\Delta(P)$,

$$\Delta'(P) = (\Delta'_1(P), \dots, \Delta'_r(P)).$$

Pelas propriedades das partições de inteiros, temos $r = \Delta_1(P) = d_1(P)$, isto é, r representa a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P . Observamos então que o número de partes de $\Delta'(P)$ é igual ao número de termos da sucessão $\widehat{\Delta}(P)$. Vejamos que não se trata de uma coincidência.

Lema 2.55 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Para cada inteiro $k \geq 1$, $\hat{d}_k(P) \leq \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$.*

Demonstração.

Seja k um inteiro positivo e seja $C = C_1 \cup \dots \cup C_k$ uma k -cofamília de P de cardinalidade máxima. C é união de k cadeias e satisfaz $|C| = \hat{d}_k(P)$.

Seja $R = P \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_k)$. Pelas observações anteriores, consideremos a \mathcal{C} -partição de P , $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_k; R)$.

Para cada inteiro $h > 1$, temos $\beta_h(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^k \min\{|C_i|, h\} + |R| \leq kh + |R|$.

Como $kh + |R| = kh + |P| - |C| = kh + |P| - \hat{d}_k(P)$ e $d_h(P) \leq \beta_h(\mathcal{C})$, temos

$$d_h(P) \leq kh + |P| - \hat{d}_k(P), \text{ ou ainda, } \hat{d}_k(P) \leq kh + |P| - d_h(P).$$

Pelo teorema 2.14, $|P| = \Delta_1(P) + \dots + \Delta_c(P)$ onde c denota a cardinalidade máxima de uma cadeia em P . Além disso, $d_h(P) = \Delta_1(P) + \dots + \Delta_h(P)$. Logo

$$kh + |P| - d_h(P) = kh + \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P).$$

Se tomarmos $h = \Delta'_k(P)$, então, pelas expressões anteriores, concluímos que

$$\hat{d}_k(P) \leq kh + \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P).$$

Pelas propriedades das partições de inteiros, temos $kh + \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P)$ igual a $\Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$ e logo $\hat{d}_k(P) \leq \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$. ■

Lema 2.56 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k, h inteiros positivos. Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k; T)$ uma \mathcal{C} -partição de P h -saturada tal que $|\mathcal{C}_i| \geq h$, para $i = 1, \dots, k$. Se $C = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$, então*

$$(i) \quad \Delta_h(P) \geq k \geq \Delta_{h+1}(P);$$

(ii) C é uma k -cofamília de cardinalidade máxima;

$$(iii) \quad |C| = \hat{d}_k(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P).$$

Demonstração.

(i) Esta alínea corresponde ao lema 2.49, considerando $k = \alpha_h$.

(ii) Visto que foi definido como união de k cadeias de P , C é uma k -cofamília. Vejamos que $|C| = \hat{d}_k(P)$. Suponhamos que $C' = \mathcal{C}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}'_k$ é uma k -cofamília tal que $|C'| > |C|$.

Seja $C' = (\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_k; T')$ onde $T' = P \setminus C'$. C' é uma \mathcal{C} -partição de P que verifica $|T'| = |P \setminus C'| = |P| - |C'| < |P \setminus C| = |T|$. Então, sendo \mathcal{C} h -saturada, temos, pelo lema 2.47,

$$\beta_h(C') \leq hk + |T'| < hk + |T| = \beta_h(C),$$

o que é uma contradição porque \mathcal{C} é h -saturada. Concluimos que $|C| = \hat{d}_k(P)$.

(iii) Pela alínea (ii), sabemos que C é uma k -cofamília de cardinalidade máxima, ou seja, $|C| = \hat{d}_k(P) = |P \setminus T| = |P| - |T|$.

Como \mathcal{C} é h -saturada, temos $d_h(P) = hk + |T|$. Então $|T| = d_h(P) - hk$ e logo

$$|P| - |T| = \Delta_1(P) + \dots + \Delta_c(P) - d_h(P) + hk = hk + \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P).$$

Concluimos que $|C| = \hat{d}_k(P) = hk + \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P)$ e portanto, como na demonstração do lema 2.55, $|C| = \hat{d}_k(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$. ■

Corolário 2.57 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e k um inteiro positivo. Se $k = \Delta_h(P)$ para algum inteiro positivo h , então*

$$\hat{d}_k(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P).$$

Demonstração.

Suponhamos que $k = \Delta_h(P)$ para algum inteiro positivo h . Pelo teorema 2.53 e pelas observações iniciais da secção anterior, podemos considerar uma

\mathcal{C} -partição de P h -saturada, $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\alpha_h}; T_h)$, onde $|\mathcal{C}_i| \geq h$ para cada $i = 1, \dots, \alpha_h$.

Pelo lema 2.56, temos que $C = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{\alpha_h}$ é uma α_h -cofamília de P de cardinalidade máxima que verifica $|C| = \hat{d}_{\alpha_h}(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_{\alpha_h}(P)$.

Pela alínea (i) do lema 2.56, $\Delta_h(P) \geq \alpha_h \geq \Delta_{h+1}(P)$ e portanto $k = \alpha_h$. Mas então concluímos que $\hat{d}_k(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$. ■

Estamos em condições de demonstrar o teorema 2.16 que estabelece a relação entre a partição $\Delta(P)$ e a sucessão $\hat{\Delta}(P)$. Observemos que, ao estabelecer esta relação, o teorema 2.16 afirma igualmente que $\hat{\Delta}(P)$ é uma partição de $|P|$.

Teorema 2.16 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Então*

$$\Delta(P)' = (\hat{\Delta}_1(P), \dots, \hat{\Delta}_l(P)),$$

onde l representa a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P .

Demonstração.

A demonstração é por indução em $|P|$. O caso $|P| = 1$ é óbvio.

Suponhamos que $|P| > 1$ e que o resultado é válido para $|P| - 1$.

Seja $k \in \{1, \dots, l\}$. Se $k = 1$, tanto $\hat{d}_1(P)$ como $\Delta'_1(P)$ representam a cardinalidade máxima de uma cadeia em P .

Suponhamos que $k > 1$. Se $k = \Delta_h(P)$, para algum inteiro positivo h , pelo corolário 2.57, concluímos que $\hat{d}_k(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$.

Se $\Delta_h(P) > k > \Delta_{h+1}(P)$, então, em particular, $\Delta_h(P) > \Delta_{h+1}(P)$. Pelo teorema 2.52, existe $x \in P$ que pertence a todas as h -famílias e $(h+1)$ -famílias de cardinalidade máxima de P .

Seja $P' = P \setminus \{x\}$. Como na demonstração do teorema 2.52, temos

$$d_h(P') = d_h(P) - 1,$$

$$d_{h+1}(P') = d_{h+1}(P) - 1$$

Então $\Delta_{h+1}(P') = d_{h+1}(P') - d_h(P') = \Delta_{h+1}(P)$ e $\Delta_h(P') = d_h(P') - d_{h-1}(P')$ que é igual a $\Delta_h(P)$ ou $\Delta_h(P) - 1$.

Afirmção. $\Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P) = \Delta'_1(P') + \dots + \Delta'_k(P')$.

Demonstração da Afirmção.

Como $k > \Delta_{h+1}(P) = \Delta_{h+1}(P')$ e $\Delta_h(P') \geq \Delta_h(P) - 1$, então

$$\Delta_i(P) \geq k \text{ se e só se } \Delta_i(P') \geq k.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P) &= \sum_{i=1}^c \min\{\Delta_i(P), k\} \\
&= \sum_{i=1}^c \min\{\Delta_i(P'), k\} \\
&= \Delta'_1(P') + \dots + \Delta'_k(P').
\end{aligned}$$

□

Por hipótese de indução, podemos considerar uma k -cofamília C em $P' \subseteq P$ tal que $|C| = \Delta'_1(P') + \dots + \Delta'_k(P') = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$.

Então $\hat{d}_k(P) \geq \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$.

Pelo lema 2.55, concluímos que $\hat{d}_k(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$. ■

Teorema 2.15 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Se l denota a cardinalidade máxima de uma anticadeia em P , então*

$$(i) \quad \hat{\Delta}_1(P) + \dots + \hat{\Delta}_l(P) = |P|;$$

$$(ii) \quad \hat{\Delta}_1(P) \geq \dots \geq \hat{\Delta}_l(P).$$

Demonstração.

Trata-se de uma consequência directa do teorema 2.16. ■

É de referir que o teorema 2.16 generaliza os teoremas de Dilworth e Mirsky. De facto, sendo as partições $\Delta(P)$ e $\hat{\Delta}(P)$ conjugadas, o primeiro termo de uma coincide com o comprimento da outra. Os teoremas de Dilworth e Mirsky correspondem exactamente a estas igualdades.

Encerramos o capítulo com a demonstração do teorema de Greene [17]. Para tal, provamos o dual do teorema 2.53. Trata-se de uma consequência da relação de conjugação entre as partições $\Delta(P)$ e $\hat{\Delta}(P)$.

Teorema 2.58 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado e seja k um inteiro positivo. Existe uma \mathcal{A} -partição de P simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada.*

Demonstração.

Seja k um inteiro positivo. Seja $h = \Delta_{k+1}(P)$. Consideremos uma h -família A de cardinalidade máxima em P . Sabemos que A pode ser expressa como $A = A_1 \cup \dots \cup A_h$, onde A_1, \dots, A_h são anticadeias de P .

Seja a \mathcal{A} -partição de P , $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_h; R)$, onde $R = P \setminus A$.

Visto que $|A| = d_h(P) = \Delta_1(P) + \dots + \Delta_h(P)$, então

$$|R| = |P| - |A| = \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P),$$

onde c denota a cardinalidade máxima de uma cadeia em P . Então

$$\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^h \min\{|A_i|, k\} + |R| \leq hk + |R| = hk + \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P).$$

Como no lema 2.55, $hk + \Delta_{h+1}(P) + \dots + \Delta_c(P) = \Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P)$. Pelo teorema 2.16, $\hat{\Delta}(P) = \Delta'(P)$, donde

$$\Delta'_1(P) + \dots + \Delta'_k(P) = \hat{\Delta}_1(P) + \dots + \hat{\Delta}_k(P) = \hat{d}_k(P)$$

Concluimos portanto que $\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) \leq \hat{d}_k(P)$.

Por outro lado, também sabemos que $\hat{d}_k(P) \leq \hat{\beta}_k(\mathcal{A})$, donde concluimos que \mathcal{A} é uma \mathcal{A} -partição de P k -saturada. Vejamos que \mathcal{A} também é $(k+1)$ -saturada. Analogamente ao que demonstrámos, também temos $\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) \leq h(k+1) + |R|$. Ora,

$$h(k+1) + |R| = hk + |R| + h = \hat{d}_k(P) + \hat{\Delta}_k(P) = \hat{d}_{k+1}(P)$$

e portanto $\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) \leq \hat{d}_{k+1}(P)$. Pela escolha de h , \mathcal{A} é $(k+1)$ -saturada. ■

Analogamente ao que foi referido para \mathcal{C} -partições, é de notar que nem sempre é possível encontrar uma \mathcal{A} -partição de P k -saturada em simultâneo para todo o k . Terminamos o capítulo com o teorema de Greene [17].

Teorema 2.10 (Greene) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e seja k um inteiro positivo. Então*

$$\hat{d}_k(P) = \min\{\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}(P)}\}.$$

Demonstração.

Observou-se anteriormente que $\hat{d}_k(P) \leq \hat{\beta}_k(\mathcal{A})$, $\forall \mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}(P)}$.

Pelo teorema 2.58, existe uma \mathcal{A} -partição \mathcal{A}' de P que é k -saturada, ou seja, que verifica $\hat{d}_k(P) = \hat{\beta}_k(\mathcal{A}')$.

Concluimos que $\hat{d}_k(P) = \min\{\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}(P)}\}$. ■

Capítulo 3

Partições e colorações de matróides

O método de construção de matróides proposto por C. St. J. Nash-Williams em [24] dá origem a um conjunto de problemas de colorações nestas estruturas.

Neste capítulo, debruçamo-nos sobre a construção de uma partição da cardinalidade de um conjunto finito S , que assume particular importância na caracterização das colorações de um matróide em S . O estudo da partição característica deve-se a J. A. Dias da Silva [9] e data de 1990.

De seguida, introduzimos o conceito de s -profundidade de um matróide em S e estabelecemos que a sucessão das s -profundidades é a conjugada da partição característica do matróide. Esta relação é demonstrada por J. A. Dias da Silva e A. Fonseca [10] em 1995, tendo como motivação os resultados acerca de conjuntos parcialmente ordenados abordados no capítulo anterior.

3.1 Generalidades sobre matróides

O termo matróide surge pela primeira vez em 1935, num artigo de H. Whitney [30] que incide sobre o estudo da dependência linear em termos axiomáticos. Tendo tido um grande desenvolvimento a partir do final da década de cinquenta, a teoria de matróides ocupa actualmente um lugar fundamental e unificador no seio da Combinatória e constitui um elo de ligação entre esta e outras áreas fundamentais da Matemática.

Para efeitos de completude, apresentamos nesta secção uma breve resenha

sobre matróides. As demonstrações dos resultados referidos podem ser encontradas em [27].

Em 1935, H. Whitney [30] apresenta diversos sistemas de axiomas que permitem definir um matróide e demonstra a sua equivalência. Neste trabalho, optou-se por introduzir o conceito através dos axiomas de independência, pois parece-nos que estes exibem de forma clara a natureza de um matróide.

Em teoria de matróides, é habitual representar um conjunto $\{x\}$ por x .

Definição 3.1 Um *matróide* é um par $M = (S, \mathcal{I})$, onde S é um conjunto finito, não vazio e \mathcal{I} uma coleção de subconjuntos de S que satisfaz os seguintes axiomas:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{I}$;
- (ii) Se $U \in \mathcal{I}$ e $V \subseteq U$, então $V \in \mathcal{I}$;
- (iii) Se $U, V \in \mathcal{I}$ e $|U| = |V| + 1$, então existe $x \in U \setminus V$ tal que $V \cup x \in \mathcal{I}$.

Dizemos que $A \subseteq S$ é *independente em M* , se $A \in \mathcal{I}$. Um subconjunto de S que não pertence a \mathcal{I} diz-se *dependente em M* .

O exemplo que se segue clarifica a analogia patente entre esta terminologia e o conceito de independência linear.

Exemplo 3.2 Seja V um espaço vectorial e S um conjunto finito, não vazio. Seja $(x_i)_{i \in S}$ uma família de vectores de V indexada em S . Dado $X \subseteq S$, consideremos que

$$X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (x_i)_{i \in X} \text{ é linearmente independente em } V.$$

Não é difícil verificar que \mathcal{I} é a coleção dos independentes de um matróide M em S . Este matróide é usualmente representado por $M = M((x_i)_{i \in S})$. Todo o matróide obtido desta forma designa-se por *matróide vectorial*.

Embora esta analogia esteja na génese da teoria de matróides, nem todos os matróides são vectoriais. O exemplo seguinte encontra-se em [27, pág. 140].

Exemplo 3.3 [27, pág. 140] Seja $S = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ e o conjunto $\mathcal{A} = \{\{a_1, a_2, b_1, b_2\}, \{a_1, a_2, c_1, c_2\}, \{b_1, b_2, c_1, c_2\}, \{b_1, b_2, d_1, d_2\}, \{c_1, c_2, d_1, d_2\}\}$.

Se \mathcal{I} for a coleção dos subconjuntos de S de cardinalidade inferior ou igual a 4 com exceção dos elementos de \mathcal{A} , é possível demonstrar que $M = (S, \mathcal{I})$ é um matróide em S não vectorial.

No que segue, S representa um conjunto finito, não vazio e $M = (S, \mathcal{I})$ um matróide em S .

Uma *base de M* é um subconjunto de S independente maximal (para a relação de inclusão). Do mesmo modo, uma *base de $A \subseteq S$* é um subconjunto de A independente maximal.

Visto que $\emptyset \in \mathcal{I}$, qualquer subconjunto de S admite pelo menos uma base. Em particular, existe sempre uma base de M .

Por outro lado, se $X \subseteq A \subseteq S$ e X é independente em M , então X está contido numa base de A . Com efeito, $X \in \mathcal{B}_A = \{Y \subseteq A : Y \in \mathcal{I}\}$ e portanto X está contido num elemento maximal de \mathcal{B}_A , ou seja, numa base de A .

No intuito de definir uma noção de dimensão, associamos a M uma aplicação de importância fulcral.

Definição 3.4 Seja $M = (S, \mathcal{I})$ um matróide em S . Chamamos *aplicação característica* ou *aplicação dimensão* de M à aplicação $d : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida por

$$d(A) = \max\{|X| : X \subseteq A, X \in \mathcal{I}\}, \forall A \subseteq S.$$

Dizemos que $d(A)$ é a *característica* ou *dimensão* de A e que $d(S)$ é a *dimensão* de M .

A proposição 3.5 estabelece algumas propriedades básicas da aplicação característica de um matróide.

Proposição 3.5 [27] *Seja $M = (S, \mathcal{I})$ um matróide em S e d a sua aplicação característica. As afirmações seguintes são verdadeiras:*

- (i) *Se $A \subseteq B \subseteq S$, então $d(A) \leq d(B)$;*

- (ii) Um conjunto $A \subseteq S$ é independente em M se e só se $d(A) = |A|$;
- (iii) Se $A, B \subseteq S$ são conjuntos independentes em M que satisfazem $|A| < |B|$, então existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $A \cup C$ é independente em M e $|A \cup C| = |B|$;
- (iv) Se B e B' são bases de $A \subseteq S$, então $|B| = |B'| = d(A)$;
- (v) Se $A, B \subseteq S$, então $d(A \cup B) + d(A \cap B) \leq d(A) + d(B)$.

Seja M um matróide em S com aplicação característica d e seja A um subconjunto de S . Dizemos que um elemento $x \in S$ *depende de* A se

$$d(A \cup x) = d(A).$$

O conjunto dos elementos que dependem de A é denominado de *fecho* de A e representado por \overline{A} . Se A for tal que $\overline{A} = A$, dizemos que A é um *fechado* ou *subespaço* de M .

É evidente que todo o elemento de A depende de A . Pelo que acabámos de referir, temos sempre $A \subseteq \overline{A}$.

Na proposição que se segue, enunciamos algumas propriedades importantes que envolvem os conceitos acima introduzidos.

Proposição 3.6 [27] *Seja $M = (S, \mathcal{I})$ um matróide em S e d a sua aplicação característica. As afirmações seguintes são verdadeiras:*

- (i) Se A é independente em M e $x \in S \setminus A$, então

$$x \text{ depende de } A \text{ se e só se } A \cup x \text{ é dependente};$$

- (ii) Um conjunto $A \subseteq S$ é um fechado de M se e só se

$$d(A \cup x) = d(A) + 1, \quad \forall x \in S \setminus A;$$

- (iii) Se B é uma base de $A \subseteq S$, então $\overline{B} = \overline{A}$ e $A \subseteq \overline{B}$.

- (iv) Se $A \subseteq S$, $d(A) = d(\overline{A})$;

- (v) Se $A \subseteq S$, então $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Antes de estabelecer os fundamentos da teoria de matróides em [30], H. Whitney dedicava-se à investigação na área da teoria de grafos. Talvez por isso, alguma terminologia proposta em [30] esteja mais relacionada com grafos do que com espaços vectoriais. As próximas definições constituem exemplos claros desta afirmação.

Um *circuito* de M é um subconjunto de S dependente minimal (para a relação de inclusão). Um *loop* de M é um elemento de S que não pertence a nenhuma base de M e um *coloop* de M é um elemento de S que pertence a todas as bases de M .

Se S for independente em M , é evidente que M não admite qualquer circuito. Aliás, esse é mesmo o único matróide em que não existem circuitos.

Por outro lado, se $C \subseteq S$ for um circuito de M , não é difícil verificar que

$$d(C) = |C| - 1.$$

É igualmente fácil mostrar que todo o subconjunto dependente de M contém um circuito, assim como mostrar que todo o subconjunto próprio de um circuito é independente em M .

M pode não admitir loops, nem coloops. Num matróide sem loops, todo o elemento de S pertence a pelo menos uma base de M .

Exemplo 3.7 Seja V um espaço vectorial e S um conjunto finito, não vazio. Seja $(x_i)_{i \in S}$ uma família de vectores de V indexada em S .

No matróide vectorial $M = M((x_i)_{i \in S})$, para cada subconjunto A de S , temos

$$d(A) = \dim \langle x_i : i \in A \rangle \quad \text{e} \quad \bar{A} = \{j \in S : x_j \in \langle x_i : i \in A \rangle\}.$$

Se o elemento zero de V pertencer à família de vectores $(x_i)_{i \in S}$, este é o único loop que o matróide vectorial $M = M((x_i)_{i \in S})$ admite. Caso contrário, M é um matróide sem loops.

A forma mais elementar de construir matróides consiste em induzir um novo matróide num subconjunto de S .

Se \mathcal{I} for a colecção dos conjuntos independentes do matróide em S , $M = (S, \mathcal{I})$, e A um subconjunto de S , não é difícil verificar que

$$\mathcal{I}' = \{X : X \subseteq A, X \in \mathcal{I}\}$$

representa a colecção dos conjuntos independentes de um matróide em A . Designamos o matróide $M' = (A, \mathcal{I}')$ por *restrição de M a A* e denotamo-lo por $M(A)$. É evidente que a aplicação característica de $M(A)$ é a restrição da aplicação característica de M a A .

O problema que nos propomos tratar neste capítulo envolve um método de construção de matróides, que é conhecido como união ou soma de matróides. Este procedimento foi proposto por C. St. J. Nash-Williams [24] e tem muitas aplicações combinatórias.

Seja S um conjunto finito, não vazio e k um inteiro positivo. Sejam M_1, \dots, M_k matróides em S e seja φ_j a aplicação característica de M_j , para cada $j = 1, \dots, k$.

É possível demonstrar [27, pág. 121] que a colecção de subconjuntos de S definida por

$$\mathcal{F} = \{I_1 \cup \dots \cup I_k : I_j \text{ é um conjunto independente em } M_j, j = 1, \dots, k\}$$

é a colecção dos conjuntos independentes de um matróide em S , cuja aplicação característica φ é dada por

$$\varphi(A) = \min_{X \subseteq A} \left\{ \sum_{j=1}^k \varphi_j(X) + |A \setminus X| \right\}, \quad \forall A \subseteq S. \quad (3.1)$$

Designamos este matróide por *soma* ou *união dos matróides* M_1, \dots, M_k e representamo-lo por

$$\bigvee_{j=1}^k M_j \quad \text{ou} \quad M_1 \vee \dots \vee M_k.$$

Neste trabalho, estamos particularmente interessados na união finita de cópias de um matróide.

Se M for um matróide em S com aplicação característica d , designamos a união de k cópias de M por *k -ésima potência de M* . Este matróide é representado por $M^{(k)}$.

Seja A um subconjunto de S . Não é difícil verificar que

$$M^{(k)}(A) = M(A)^{(k)}.$$

Estabelecendo que $d = d_1$, denotamos a aplicação característica de $M^{(k)}$ por d_k . Por convenção, assumimos que $d_0(A) = 0, \forall A \subseteq S$.

Seja A um conjunto independente em $M^{(k)}$. Tendo em conta a definição de conjunto independente numa união de matróides, não é difícil verificar que

existem conjuntos I_1, \dots, I_k independentes em M , disjuntos dois a dois e tais que

$$A = I_1 \cup \dots \cup I_k.$$

Dizemos que a família (I_1, \dots, I_k) é uma k -decomposição de A .

Se M for um matróide sem loops, ao menor inteiro c tal que $d_c(S) = |S|$, chamamos *número cromático* de M .

Atendendo à expressão 3.1, para cada $1 \leq k \leq c$, deduzimos que

$$d_k(A) = \min_{X \subseteq A} \{k \cdot d_1(X) + |A \setminus X|\}, \quad \forall A \subseteq S. \quad (3.2)$$

A proposição que se segue é uma consequência directa da expressão 3.2 e revela-se de grande utilidade.

Proposição 3.8 *Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Seja A um conjunto independente em $M^{(k)}$. Então*

$$|A| \leq k \cdot d_1(A).$$

3.2 Motivação e principais resultados

Constam desta secção os principais resultados do capítulo, assim como definições e observações referentes ao contexto dos problemas que vamos tratar.

Relativamente à motivação, sugerimos [1] e [27]. Salvo indicação em contrário, os restantes resultados podem ser encontrados em [9] e [10].

No que se segue, S é um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Para cada $1 \leq k \leq c$, d_k representa a aplicação característica de $M^{(k)}$.

O estudo das potências de M dá origem a diversos resultados acerca de colorações de matróides. Nomeadamente, o conhecimento das k -ésimas potências de M permite-nos determinar o número mínimo de conjuntos independentes em M cuja união é S .

Nesse sentido, basta observar que S pode ser descrito como a união de k conjuntos independentes em M se e só se S for independente em $M^{(k)}$. O número cromático de M foi definido como sendo o menor inteiro c para o qual

S é independente em $M^{(c)}$, pelo que representa exactamente o número mínimo de conjuntos independentes em M cuja união é S .

É de notar que a definição de número cromático só faz sentido em matróides sem loops, o que justifica termos assumido que M não possui qualquer loop.

O problema que acabámos de descrever está na génese deste trabalho e evidencia bem a relação existente entre colorações e potências de M . Neste capítulo, debruçamo-nos sobre sucessões numéricas que provêm de c -decomposições de S .

É evidente que uma c -decomposição de S determina uma sucessão numérica formada pelas cardinalidades dos c conjuntos independentes em M que compõem a decomposição. Com efeito, se (I_1, \dots, I_c) constituir uma c -decomposição de S , então $(|I_1|, \dots, |I_c|)$ é uma sucessão numérica que verifica

$$|S| = |I_1| + \dots + |I_c|.$$

Interessam-nos particularmente as sucessões numéricas que formam partições de $|S|$. Estas são fundamentais para a caracterização das colorações de M .

Definição 3.9 Seja M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Seja $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_c)$ uma partição de $|S|$. Uma família (U_1, \dots, U_c) de conjuntos independentes em M , não vazios, disjuntos dois a dois, diz-se uma μ -coloração de M se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$(i) \quad |U_i| = \mu_i, \text{ para cada } i = 1, \dots, c;$$

$$(ii) \quad \bigcup_{i=1}^c U_i = S.$$

M diz-se μ -colorável se existir uma μ -coloração de M .

Um dos objectivos deste capítulo consiste em demonstrar que existe uma c -decomposição de S que dá origem a uma coloração de M . A partição associada a esta coloração tem por base as dimensões das potências de M e tem aplicações na área da Álgebra Multilinear. Para mais detalhes, sugerimos [9], [11] e [12].

Teorema 3.10 *Seja S um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Para cada $1 \leq k \leq c$, seja d_k a aplicação característica de $M^{(k)}$. Então, a sucessão*

$$d(M) = (d_1(S), d_2(S) - d_1(S), \dots, d_c(S) - d_{c-1}(S))$$

é uma partição de $|S|$.

Tendo por motivação o teorema 2.16, torna-se natural questionar se a conjugada da partição $d(M)$ provém de alguma decomposição específica de S .

O segundo objectivo deste capítulo consiste em introduzir o conceito de s -profundidade de um matróide M e estabelecer a ligação entre este conceito e a partição $d(M)$.

Definição 3.11 Seja S um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S com aplicação característica d_1 . Seja s um inteiro positivo.

Se não existem conjuntos independentes em M de cardinalidade s , dizemos que a s -profundidade de M é igual a 0.

Caso contrário, definimos a s -profundidade de M como sendo o maior inteiro positivo k para o qual existe um conjunto F independente em $M^{(k)}$ que satisfaz

$$d_{k-1}(F) = (k-1)d_1(F) \text{ e } |F| = (k-1)d_1(F) + s.$$

Para cada inteiro positivo s , denotamos a s -profundidade de M por $t_s(M)$. Chamamos *profundidade de M* à 1-profundidade de M .

Exemplo 3.12 Seja (e_1, e_2) uma família linearmente independente de um espaço vectorial real V . Sejam $x_1 = e_1$, $x_2 = e_1 + e_2$, $x_3 = e_2$, $x_4 = 2e_1$, $x_5 = e_1 - e_2$ e $x_6 = e_1$.

Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Não é difícil verificar que a profundidade de M é igual a 3.

Seja k um inteiro positivo. Determinemos conjuntos $F \subseteq S$ independentes em $M^{(k)}$ satisfazendo

$$d_{k-1}(F) = (k-1)d_1(F) \text{ e } |F| = (k-1)d_1(F) + 1.$$

Se $k = 1$, todo o subconjunto singular de S está nas condições anteriores.

Se $k = 2$, $F = \{1, 4\}$ é independente em $M^{(2)}$ e satisfaz

$$|F| = 2 = 1.d_1(F) + 1.$$

Se $k = 3$, $F = \{1, 4, 6\}$ é independente em $M^{(3)}$ e tal que

$$d_2(F) = 2 = 2.d_1(F) \text{ e } |F| = 3 = 1.d_2(F) + 1.$$

Atendendo a que o número cromático de M é igual a 3, concluímos que

$$t_1(M) = 3.$$

A ligação referida entre o conceito de s -profundidade de M e $d(M)$ surge ao considerarmos a sucessão das s -profundidades,

$$t(M) = (t_1(M), t_2(M), \dots, t_n(M))$$

onde $n = d_1(S)$.

Teorema 3.13 *Seja S um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S , sem loops, com aplicação característica d_1 e número cromático c . Então*

$$d(M)' = (t_1(M), t_2(M), \dots, t_n(M))$$

onde $n = d_1(S)$.

O teorema 3.13 afirma que a sucessão das s -profundidades de um matróide constitui a partição conjugada de $d(M)$, correspondendo por isso ao teorema 2.16 para conjuntos parcialmente ordenados. Decorre naturalmente do teorema 3.13 que $t(M)$ é uma partição de $|S|$.

3.3 A partição característica de um matróide

Nesta secção, mostramos que todo o matróide M num conjunto finito S , sem loops, com número cromático c , admite uma c -decomposição de S especial. Deste resultado, deduzimos a existência de uma partição de $|S|$, cuja construção assenta nas dimensões das potências de M .

As demonstrações apresentadas devem-se a J. A. Dias da Silva [9].

Ao longo da secção, S é um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S , sem loops, com número cromático igual a c . Para cada $1 \leq k \leq c$, a aplicação característica de $M^{(k)}$ é representada por d_k .

Lema 3.14 *Seja M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Seja B uma base de $M^{(t)}$, onde $1 \leq t \leq c$. Então, existem t conjuntos independentes em M , B_1, \dots, B_t , não vazios, disjuntos dois a dois, tais que*

$$B_1 \cup \dots \cup B_t$$

é uma base de $M^{(k)}$, para $k = 1, \dots, t$, e

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_t.$$

Demonstração.

A demonstração é por indução em t . O caso $t = 1$ é óbvio. Consideremos $t > 1$. Sejam I_1, \dots, I_t conjuntos independentes em M , não vazios, disjuntos dois a dois e tais que

$$B = I_1 \cup \dots \cup I_t.$$

Visto que $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} = I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup (I_t \setminus I_t)$ é independente em $M^{(t-1)}$, podemos definir I'_t como sendo um conjunto minimal entre os conjuntos $J \subseteq I_t$ que satisfazem a condição

$$B \setminus J = I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup (I_t \setminus J)$$

é independente em $M^{(t-1)}$.

Seja $A = B \setminus I'_t$. Vejamos que, para todo $x \in S \setminus A$, $A \cup x$ é dependente em $M^{(t-1)}$, ou seja, vejamos que A constitui uma base de $M^{(t-1)}$.

Seja $x \in S \setminus A$. Se $x \in I'_t$ e $A \cup x$ é independente em $M^{(t-1)}$, então

$$A \cup x = (B \setminus I'_t) \cup x = B \setminus (I'_t \setminus x) = I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup (I_t \setminus (I'_t \setminus x))$$

é independente em $M^{(t-1)}$, contradizendo a minimalidade de I'_t . Concluimos que $A \cup x$ é dependente em $M^{(t-1)}$.

Se $x \in S \setminus B$ e $A \cup x$ é independente em $M^{(t-1)}$, temos que

$$A \cup x = I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup (I_t \setminus I'_t) \cup x$$

é independente em $M^{(t-1)}$.

Então, existem P_1, \dots, P_t independentes em M tais que

$$B \cup x = P_1 \cup \dots \cup P_t \cup x$$

é independente em $M^{(t)}$, o que contradiz o facto de B ser uma base de $M^{(t)}$.

Concluimos que $A = B \setminus I'_t$ constitui uma base de $M^{(t-1)}$.

Pela hipótese de indução, podemos admitir a existência de uma família de conjuntos B_1, \dots, B_{t-1} independentes em M , não vazios, disjuntos dois a dois e tais que

$$B_1 \cup \dots \cup B_k$$

é uma base de $M^{(k)}$, para $k = 1, \dots, t - 1$.

Com $B_t = I'_t$, a família (B_1, \dots, B_t) verifica as condições pretendidas. ■

A existência da c -decomposição de S referida anteriormente constitui um caso particular do lema 3.14.

Proposição 3.15 *Seja M um matróide em S , sem loops e com número cromático c . Então, existem conjuntos independentes em M , B_1, \dots, B_c , não vazios, disjuntos dois a dois e tais que*

$$B_1 \cup \dots \cup B_k$$

é uma base de $M^{(k)}$, para $k = 1, \dots, c$.

Demonstração.

Basta considerar $t = c$ no lema 3.14. ■

Podemos agora estabelecer a seguinte definição.

Definição 3.16 *Seja M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Uma família (B_1, \dots, B_c) de conjuntos independentes em M , não vazios, disjuntos dois a dois e tais que*

$$B_1 \cup \dots \cup B_k$$

é uma base de $M^{(k)}$, para $k = 1, \dots, c$, diz-se uma família saturada de M .

Exemplo 3.17 *Seja V um espaço vectorial real e (e_1, e_2) uma base de V . Sejam $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, $x_3 = 2e_1$, $x_4 = e_1 + e_2$, $x_5 = e_2$ e $x_6 = e_1$.*

Seja $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

M é um matróide sem loops, com número cromático igual a 3. Portanto, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ constitui uma base de $M^{(3)}$.

$$S = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\}$$

é claramente uma família saturada de M .

A proposição 3.15 afirma que M admite sempre uma família saturada. A existência desta c -decomposição de S especial permite-nos construir uma partição de $|S|$ de grande importância.

Teorema 3.10 *Seja S um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Para cada $1 \leq k \leq c$, seja d_k a aplicação característica de $M^{(k)}$. Então, a sucessão*

$$d(M) = (d_1(S), d_2(S) - d_1(S), \dots, d_c(S) - d_{c-1}(S))$$

é uma partição de $|S|$.

Demonstração.

Atendendo a que o número cromático de M é igual a c , temos claramente

$$d_1(S) + d_2(S) - d_1(S) + \dots + d_c(S) - d_{c-1}(S) = d_c(S) = |S|.$$

Por outro lado, para cada $i \in \{1, \dots, c\}$,

$$d_{i-1}(S) \leq d_i(S).$$

Com efeito, se $i = 1$, $d_{i-1}(S) = d_0(S) = 0 \leq d_1(S)$. Se $i > 1$, $d_{i-1}(S)$ representa a dimensão de $M^{(i-1)}$ e $d_i(S)$ a dimensão de $M^{(i)}$.

Consideremos uma base B de $M^{(i-1)}$. Atendendo a que B pode ser descrita como $B = I_1 \cup \dots \cup I_{i-1} \cup \emptyset$, com $I_1, \dots, I_{i-1}, \emptyset$ independentes em M , B é independente em $M^{(i)}$. Em particular, $|B| \leq d_i(S)$, ou seja,

$$d_{i-1}(S) \leq d_i(S).$$

Vejamos que, para $i = 1, \dots, c$,

$$d_i(S) - d_{i-1}(S) \geq d_{i+1}(S) - d_i(S).$$

Pela proposição 3.15, podemos considerar uma família (B_1, \dots, B_c) de conjuntos independentes em M , não vazios, disjuntos dois a dois e tais que

$$B_1 \cup \dots \cup B_k$$

é uma base de $M^{(k)}$, para $k = 1, \dots, c$.

Então, dado $i \in \{2, \dots, c\}$,

$$d_i(S) = |B_1 \cup \dots \cup B_i| \text{ e } d_{i-1}(S) = |B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}|,$$

donde,

$$d_i(S) - d_{i-1}(S) = |B_i|.$$

Do mesmo modo se prova que

$$d_{i+1}(S) - d_i(S) = |B_{i+1}|.$$

Por outro lado, também temos que

$$B_{i+1} \subseteq \overline{B_i}.$$

Com efeito, se $x \in B_{i+1}$ e $x \notin \overline{B_i}$, pela proposição 3.6, $B_i \cup x$ é independente em M . Então, $B_1 \cup \dots \cup B_i \cup x$ constitui um conjunto independente em $M^{(i)}$ de cardinalidade superior à da base $B_1 \cup \dots \cup B_i$. Tal constitui evidentemente uma contradição. Concluimos que $B_{i+1} \subseteq \overline{B_i}$.

De novo pela proposição 3.6, temos que

$$d_1(\overline{B_{i+1}}) = d_1(B_{i+1}) = |B_{i+1}| \leq d_1(\overline{B_i}) = d_1(B_i) = |B_i|.$$

Concluimos que

$$d_i(S) - d_{i-1}(S) \geq d_{i+1}(S) - d_i(S)$$

e portanto $(d_1(S) - d_0(S), d_2(S) - d_1(S), \dots, d_c(S) - d_{c-1}(S))$ constitui uma partição de $d_c(S) = |S|$. ■

Da demonstração do teorema 3.10 deduzimos que

$$d(M) = (d_1(S) - d_0(S), d_2(S) - d_1(S), \dots, d_c(S) - d_{c-1}(S))$$

é uma sucessão crescente e côncava, isto é,

$$(i) \quad 0 = d_0(S) \leq d_1(S) \leq d_2(S) \leq \dots \leq d_{c-1}(S) \leq d_c(S);$$

$$(ii) \quad d_1(S) - d_0(S) \geq d_2(S) - d_1(S) \geq \dots \geq d_c(S) - d_{c-1}(S).$$

Além disso, o teorema 3.10 também afirma que

$$(iii) \quad \sum_{i=1}^c d_i(S) - d_{i-1}(S) = |S|.$$

A partição $d(M)$ é designada por *partição característica* de M .

Por último, verifiquemos que a partição característica de M caracteriza uma coloração de M .

Se (B_1, \dots, B_c) for uma família saturada de M , então B_1, \dots, B_c são conjuntos independentes em M , dois a dois disjuntos e, pela demonstração do teorema 3.10, tais que $|B_i| = d_i(S) - d_{i-1}(S)$, para $i = 1, \dots, c$. Concluimos que M é $d(M)$ -colorível.

É de notar que, em [9], J. A. Dias da Silva demonstra ainda que, para toda a partição μ de $|S|$, o matróide M é μ -colorível se e só se $d(M) \succeq \mu$. Observamos portanto que o conhecimento da partição característica permite determinar todas as partições associadas a colorações de M .

Exemplo 3.18 Voltemos a considerar o matróide $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ definido no exemplo 3.17. Foi observado que $S = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\}$ é uma família saturada de M e portanto

$$d(M) = (d_1(S), d_2(S) - d_1(S), d_3(S) - d_2(S)) = (2 - 0, 4 - 2, 6 - 4) = (2, 2, 2).$$

Em particular, M é $(2, 2, 2)$ -colorível.

Exemplo 3.19 Sejam m, n inteiros positivos. Denotamos por $\Gamma_{m,n}$ o conjunto das aplicações de $\{1, \dots, m\}$ em $\{1, \dots, n\}$ e designamos por *partição de multiplicidades de γ* $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ a partição $M_\gamma \vdash m$ definida pela reordenação por ordem decrescente dos termos da sucessão de inteiros não negativos $(|\gamma^{-1}(i)|)_{i=1, \dots, n}$.

Seja V um espaço vectorial unitário e seja (e_1, \dots, e_n) uma base de V . Seja $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ e M_γ a partição de multiplicidades de γ . O matróide vectorial $M = M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})$ satisfaz

$$d(M) = M'_\gamma.$$

De facto, não é difícil verificar que, para cada $\sigma \in S_m$,

$$d(M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})) = d(M(e_{\gamma\sigma(1)}, \dots, e_{\gamma\sigma(m)})).$$

Consideremos então $M_\gamma = (m_1, \dots, m_s)$, $m_s \neq 0$ e, para cada $1 \leq j \leq s$, seja $i_j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|\gamma^{-1}(\{i_j\})| = m_j$. Temos

$$d(M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})) = d(M(\underbrace{e_{i_1}, \dots, e_{i_1}}_{m_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{e_{i_s}, \dots, e_{i_s}}_{m_s \text{ vezes}})).$$

Consideremos o diagrama de Young de M_γ . Podemos preencher os nodos de $[M_\gamma]$ com os vectores da família $(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})$, de modo que na primeira linha fiquem colocados m_1 vectores iguais a e_{i_1} , na segunda linha m_2 vectores iguais a e_{i_2} e assim sucessivamente até à última linha.

Deste modo, em cada coluna de $[M_\gamma]$, fica colocada uma família linearmente independente $(e_i)_{i \in C_t}$, para $1 \leq t \leq m_1$, tal que

$$C_1 \cup \dots \cup C_t$$

é uma base de $M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})^{(t)} = M^{(t)}$. Isto é, $M'_\gamma = d(M)$.

3.4 A partição de profundidade de um matróide

Nesta secção, introduzimos o conceito de s -profundidade de um matróide M e estabelecemos uma relação entre a sucessão das s -profundidades de M e a sua partição característica. Nesse sentido, revela-se necessário estudar uma classe de conjuntos independentes nas k -ésimas potências de um matróide, que são designados por transversais.

O conceito de transversal numa união de matróides foi estudado em 1988 por R. Cordovil, J. A. Dias da Silva e A. Fonseca [8]. Os restantes resultados podem ser encontrados em [10].

Doravante, S é um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Para cada $1 \leq k \leq |S|$, representamos a aplicação característica de $M^{(k)}$ por d_k .

Definição 3.20 Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Dizemos que $T \subseteq S$ é uma *transversal parcial* de $M^{(k)}$ se existe uma família (I_1, \dots, I_k) de subconjuntos de T disjuntos dois a dois, que satisfaz

- (i) I_j é uma base de $M(T)$, para cada $j = 1, \dots, k$;
- (ii) $T = I_1 \cup \dots \cup I_k$.

Chamamos *transversal* a uma transversal parcial de $M^{(k)}$ que é maximal relativamente à relação de inclusão.

Atendendo à definição de restrição de M a um subconjunto de S , todo o conjunto independente em M constitui uma transversal parcial de M .

Seja T uma transversal parcial de $M^{(k)}$. Se (I_1, \dots, I_k) for uma família de subconjuntos de T disjuntos dois a dois, que satisfaz (i) e (ii), não é difícil verificar que

$$\overline{T} = \overline{I_1} = \dots = \overline{I_k}$$

onde \overline{T} representa o fecho de T em M e $\overline{I_j}$ o fecho de I_j em M , para cada $j = 1, \dots, k$.

É por vezes útil observar que uma transversal parcial de $M^{(k)}$ admite a caracterização que se segue.

Proposição 3.21 *Seja M um matróide em S com aplicação característica d_1 e seja $1 \leq k \leq |S|$. $T \subseteq S$ é uma transversal parcial de $M^{(k)}$ se e só se satisfaz*

(i') T é independente em $M^{(k)}$;

(ii') $|T| = k \cdot d_1(T)$.

Demonstração.

Suponhamos que $T \subseteq S$ é uma transversal parcial de $M^{(k)}$. Então,

$$T = I_1 \cup \dots \cup I_k,$$

onde I_1, \dots, I_k são subconjuntos de T dois a dois disjuntos e cada I_j é uma base de $M(T)$, para $j = 1, \dots, k$.

Atendendo à definição de $M(T)$, para cada $1 \leq j \leq k$, I_j é independente em M e portanto T é independente em $M^{(k)}$.

Por outro lado, para cada $1 \leq j \leq k$, I_j é uma base de $M(T)$, donde $|I_j| = d_1(I_j) = d_1(T)$. Então,

$$|T| = |I_1 \cup \dots \cup I_k| = \sum_{j=1}^k |I_j| = \sum_{j=1}^k d_1(T) = k \cdot d_1(T).$$

Reciprocamente, suponhamos que $T \subseteq S$ satisfaz (i') e (ii').

Sendo T independente em $M^{(k)}$, podemos considerar uma k -decomposição (I_1, \dots, I_k) de T . Para cada $1 \leq j \leq k$, I_j é um subconjunto de T independente em M , donde I_j é independente em $M(T)$. Por (ii'),

$$|T| = |I_1| + \dots + |I_k| = k \cdot d_1(T).$$

Daqui segue que $|I_j| = d_1(I_j) = d_1(T)$, para cada $j = 1, \dots, k$, pois, se existisse j tal que $d_1(I_j) < d_1(T)$, teríamos $|T| > k \cdot d_1(T)$, contrariando a proposição 3.8.

Sendo I_j independente em $M(T)$ e $|I_j| = d_1(I_j) = d_1(T)$, concluímos que I_j é uma base de $M(T)$, para cada $j = 1, \dots, k$. ■

Exemplo 3.22 *Seja V um espaço vectorial real e (e_1, e_2, e_3) uma base de V .*

Sejam $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, $x_3 = e_3$, $x_4 = 2e_1$, $x_5 = 2e_2$, $x_6 = 2e_3$, $x_7 = e_1 + e_2$, $x_8 = e_1 + e_3$ e $x_9 = 2e_2$.

Consideremos o matróide vectorial $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ em $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Verifica-se facilmente que o número cromático de M é igual a 3, pelo que S é independente em $M^{(3)}$. Atendendo a que

$$d_1(\{1, 2, 3\}) = d_1(\{4, 5, 6\}) = d_1(\{7, 8, 9\}) = 3,$$

temos que

$$S = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9\}$$

é uma transversal parcial de $M^{(3)}$. Também não é difícil provar que

$$T = \{2, 5, 9\} = \{2\} \cup \{5\} \cup \{9\}$$

é uma transversal parcial de $M^{(3)}$. No entanto,

$$T' = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3\} \cup \{7, 8, 9\}$$

é uma transversal parcial de $M^{(2)}$, mas não é uma transversal parcial de $M^{(3)}$.

No exemplo 3.22, exibimos dois transversais parciais de $M^{(3)}$. Em geral, basta existir um circuito em $M^{(k)}$ para que a k -ésima potência de M contenha uma transversal parcial.

Proposição 3.23 *Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Seja C um circuito de $M^{(k)}$. Então, para cada $x \in C$,*

$$C \setminus x$$

é uma transversal parcial de $M^{(k)}$.

Demonstração.

Seja $C \subseteq S$ um circuito de $M^{(k)}$. Então, C é um subconjunto de S dependente minimal. Como $C \neq \emptyset$, para cada $x \in C$, $C \setminus x$ é independente em $M^{(k)}$.

Então, pela proposição 3.8,

$$|C| - 1 = |C \setminus x| \leq k \cdot d_1(C \setminus x) \leq k \cdot d_1(C).$$

Por outro lado, sendo C um circuito de $M^{(k)}$, temos

$$k \cdot d_1(C) = |C| - 1.$$

Com efeito,

$$d_k(C) = |C| - 1 = \min_{X \subseteq C} \{k.d_1(X) + |C \setminus X|\}.$$

Se $X \subsetneq C$, X é independente em $M^{(k)}$ e portanto, pela proposição 3.8,

$$|X| \leq k.d_1(X).$$

Logo,

$$k.d_1(X) + |C \setminus X| > |C| - 1.$$

Então,

$$d_k(C) = k.d_1(C) = |C| - 1.$$

Podemos assim concluir que

$$|C| - 1 = |C \setminus x| \leq k.d_1(C \setminus x) \leq k.d_1(C) = |C \setminus x| = |C| - 1,$$

ou seja, que $|C \setminus x| = k.d_1(C \setminus x)$. Pela proposição 3.21, deduzimos que $C \setminus x$ é uma transversal parcial de $M^{(k)}$. ■

O próximo resultado afirma que, dada uma base B de $M^{(k)}$, podemos munir o conjunto das transversais parciais contidas em B da estrutura de reticulado. Consequentemente, o conjunto das transversais parciais contidas em B admite um máximo para a relação de inclusão.

Proposição 3.24 *Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Seja B uma base de $M^{(k)}$. O conjunto das transversais parciais contidas em B admite um máximo para a relação de inclusão. Mais, se T_1 e T_2 forem transversais parciais de $M^{(k)}$ contidas em B , o mesmo acontece com $T_1 \cup T_2$ e $T_1 \cap T_2$.*

Demonstração.

Visto que a primeira afirmação decorre da segunda, limitar-nos-emos a provar a segunda parte do enunciado.

Seja B uma base de $M^{(k)}$ e sejam T_1 e T_2 transversais parciais contidas em B . Atendendo a que são subconjuntos de um conjunto independente em $M^{(k)}$, $T_1 \cup T_2$ e $T_1 \cap T_2$ são independentes em $M^{(k)}$. Então, pela proposição 3.8,

$$|T_1 \cup T_2| + |T_1 \cap T_2| \leq k.d_1(T_1 \cup T_2) + k.d_1(T_1 \cap T_2).$$

Atendendo à alínea (v) da proposição 3.5,

$$k.d_1(T_1 \cup T_2) + k.d_1(T_1 \cap T_2) \leq k.d_1(T_1) + k.d_1(T_2),$$

Sendo T_1 e T_2 transversais parciais de $M^{(k)}$,

$$k.d_1(T_1) + k.d_1(T_2) = |T_1| + |T_2| = |T_1 \cup T_2| + |T_1 \cap T_2|.$$

Concluimos que

$$|T_1 \cup T_2| + |T_1 \cap T_2| = k.d_1(T_1 \cup T_2) + k.d_1(T_1 \cap T_2)$$

e portanto $|T_1 \cup T_2| = k.d_1(T_1 \cup T_2)$ e $|T_1 \cap T_2| = k.d_1(T_1 \cap T_2)$. Pela proposição 3.21, $T_1 \cup T_2$ e $T_1 \cap T_2$ são transversais parciais de $M^{(k)}$. ■

Os resultados seguintes têm como objectivo demonstrar que, nas condições da proposição 3.24, a transversal parcial máxima contida na base B é uma transversal de $M^{(k)}$.

Proposição 3.25 *Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Seja $T \subseteq S$ uma transversal parcial de $M^{(k)}$. Então, o fecho de T em $M^{(k)}$ coincide com o fecho de T em M .*

Demonstração.

Para cada $A \subseteq S$, representemos o fecho de A em $M^{(k)}$ por \overline{A}^k e o fecho de A em M por \overline{A} .

Seja T uma transversal parcial de $M^{(k)}$. Vejamos que $\overline{T}^k \subseteq \overline{T}$.

Seja $x \in \overline{T}^k$. Como $T \subseteq \overline{T}$, podemos considerar apenas o caso $x \in \overline{T}^k \setminus T$.

Suponhamos que $x \notin \overline{T}$. Seja (I_1, \dots, I_k) uma família de subconjuntos de T tal que, para cada $j = 1, \dots, k$, I_j é uma base de $M(T)$ e

$$T = I_1 \cup \dots \cup I_k.$$

Se $x \notin \overline{T}$ então, para cada $j = 1, \dots, k$,

$$x \notin \overline{I_j}.$$

Atendendo à proposição 3.6, concluimos que $I_j \cup x$ é independente em M . Então,

$$T \cup x = (I_1 \cup x) \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$$

é independente em $M^{(k)}$ e portanto $x \notin \overline{T}^k$.

Reciprocamente, consideremos $x \in \overline{T} \setminus T$. Suponhamos que $T \cup x$ é independente em $M^{(k)}$. Então, atendendo à proposição 3.8,

$$|T \cup x| = |T| + 1 \leq k.d_1(T \cup x) = k.d_1(T) = |T|.$$

■

Proposição 3.26 *Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Seja B uma base de $M^{(k)}$ e T a transversal parcial máxima contida em B . Então*

$$S \setminus B \subseteq \overline{T}$$

onde \overline{T} representa o fecho de T em M .

Demonstração.

Seja B uma base de $M^{(k)}$. Para cada $x \in S \setminus B$, $B \cup x$ é dependente em M . Então, existe um circuito de $M^{(k)}$, $C(B, x)$ tal que

$$x \in C(B, x) \subseteq B \cup x.$$

Pela proposição 3.23, $C \setminus x$ é uma transversal parcial de $M^{(k)}$ contida em B e portanto, pela maximalidade de T ,

$$C \setminus x \subseteq T.$$

Por outro lado, $x \in \overline{C \setminus x^k}$ que, pela proposição 3.25, coincide com $\overline{C \setminus x}$. Deste modo, concluímos que

$$x \in \overline{C \setminus x} \subseteq \overline{T}.$$

■

Proposição 3.27 *Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Seja B uma base de $M^{(k)}$ e $T \subseteq B$ a transversal parcial máxima contida em B . Se (I_1, \dots, I_k) é uma k -decomposição de B , então*

$$S \setminus B \subseteq \overline{T \cap I_1} = \dots = \overline{T \cap I_k}.$$

Demonstração.

Trata-se de uma consequência imediata das proposições 3.26 e 3.21, visto que, se (I_1, \dots, I_k) for uma k -decomposição de B , então

$$(T \cap I_1, \dots, T \cap I_k)$$

é uma k -decomposição de T . ■

Atendendo às propriedades estabelecidas nas proposições anteriores, vejamos que, dada uma base B de $M^{(k)}$, a transversal parcial máxima que está contida na base B é uma transversal de $M^{(k)}$.

Corolário 3.28 *Seja M um matróide em S e $1 \leq k \leq |S|$. Seja B uma base de $M^{(k)}$ e T a transversal parcial máxima contida em B . Então, T é uma transversal de $M^{(k)}$.*

Demonstração.

Seja B uma base de $M^{(k)}$ e T a transversal parcial máxima contida em B . Pela proposição 3.26, temos

$$S \setminus B \subseteq \overline{T}$$

onde \overline{T} indica o fecho de T em M .

Começemos por verificar que $B \setminus T = S \setminus \overline{T}$. Visto que $S \setminus B \subseteq \overline{T}$, é evidente que $S \setminus \overline{T} \subseteq B \setminus T$. Seja $x \in B \setminus T$. Como $T \cup x \subseteq B$, $T \cup x$ é independente em $M^{(k)}$. Logo, $x \notin \overline{T}^k = \overline{T}$. Concluimos que

$$B \setminus T = S \setminus \overline{T}.$$

Veamos que $B \setminus T$ está contido no conjunto dos coloops de $M^{(k)}$.

Seja $x \in B \setminus T = S \setminus \overline{T}$ e seja B' uma base de $M^{(k)}$. Suponhamos, com vista à obtenção de uma contradição, que $x \notin B'$. Então, $x \in B \setminus B'$.

Atendendo à alínea (iii) da proposição 3.5, podemos considerar $y \in B' \setminus B$ de forma a que $B'' = (B \cup y) \setminus x$ constitua uma base de $M^{(k)}$.

Ora, $x \notin T$ e $T \subseteq B \subseteq B \cup y$, pelo que $T \subseteq B''$. Além disso, T é uma transversal parcial máxima de B'' . Como $x \in S \setminus B''$ e $S \setminus B'' \subseteq \overline{T}$, deduzimos que $x \in \overline{T}$, o que constitui evidentemente uma contradição. Concluimos que $x \in B'$ e portanto $B \setminus T$ está contido no conjunto dos coloops de $M^{(k)}$.

Veamos que B é a única base de $M^{(k)}$ que contém T . Se B' for uma base de $M^{(k)}$ que verifica $T \subseteq B'$, então, pelo que acabámos de provar, $B \setminus T \subseteq B'$. Visto que B e B' são bases de $M^{(k)}$ que satisfazem $B \subseteq B'$, concluimos que $B = B'$. Então, B é a única base de $M^{(k)}$ que contém T e logo T é uma transversal de $M^{(k)}$. ■

O corolário 3.28 afirma que existem tantas transversais de $M^{(k)}$ quanto bases. Mais, se $M^{(k)}$ não possuir coloops, então as transversais de $M^{(k)}$ são exactamente as bases de $M^{(k)}$.

No que se segue, introduzimos o conceito de s -quasi-transversal, estabelecendo um elo entre as noções de transversal e s -profundidade.

Definição 3.29 *Seja M um matróide em S e $1 \leq s, k \leq |S|$. $T \subseteq S$ é uma s -quasi-transversal parcial de $M^{(k)}$ se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) T é independente em $M^{(k)}$;

(ii) $d_{k-1}(T) = (k-1)d_1(T)$;

(iii) $|T| = (k-1)d_1(T) + s$.

Chamamos *quasi-transversal* a uma s -quasi-transversal para algum s .

Se T for uma s -quasi-transversal de $M^{(k)}$, então

$$s \leq d_1(T).$$

Com efeito, a proposição 3.8 garante-nos que $|T| \leq k.d_1(T)$. Pela alínea (iii) da definição 3.29, deduzimos que $(k-1)d_1(T) + s \leq k.d_1(T)$, o que é equivalente a $s \leq d_1(T)$.

À semelhança das transversais, as quasi-transversais admitem uma caracterização em termos de k -decomposições.

Proposição 3.30 *Seja M um matróide em S , $1 \leq s, k \leq |S|$ e $T \subseteq S$. Então, T é uma s -quasi-transversal de $M^{(k)}$ se e só se existem conjuntos A_1, \dots, A_k independentes em M , disjuntos dois a dois, tais que*

(i') $T = A_1 \cup \dots \cup A_k$;

(ii') $\overline{A_1} = \dots \overline{A_{k-1}} \supseteq A_k$;

(iii') $|A_k| = s$.

Demonstração.

Seja $T \subseteq S$ uma s -quasi-transversal de $M^{(k)}$.

Consideremos a restrição de $M^{(k)}$ a T , $M^{(k)}(T) = M(T)^{(k)}$. Como T é um conjunto independente em $M^{(k)}$, T constitui uma base de $M(T)^{(k)}$. Pela proposição 3.15, podemos considerar uma família (A_1, \dots, A_k) de subconjuntos de T , independentes em M , dois a dois disjuntos, tais que

$$T = A_1 \cup \dots \cup A_k$$

e

$$A_1 \cup \dots \cup A_t$$

é uma base de $M(T)^{(t)}$, para cada $t = 1, \dots, k$.

Atendendo a que $d_{k-1}(T) = (k-1).d_1(T)$, concluímos que A_1, \dots, A_{k-1} constituem bases de $M(T)$ e portanto

$$\overline{A_1} = \dots \overline{A_{k-1}}.$$

Então, para cada $j = 1, \dots, k-1$, $|A_j| = d_1(T)$ e

$$|T| = (k-1).d_1(T) + |A_k| = (k-1).d_1(T) + s.$$

Concluímos que $|A_k| = s$.

Suponhamos agora que $T = A_1 \cup \dots \cup A_k$, onde (A_1, \dots, A_k) é uma família de independentes em M , disjuntos dois a dois e que verificam (ii') e (iii') .

É óbvio que T é independente em $M^{(k)}$. Da alínea (ii') , temos que A_1, \dots, A_{k-1} constituem bases de $M(T)$. Então,

$$d_{k-1}(T) \geq |A_1| + \dots + |A_{k-1}| = (k-1).d_1(T)$$

e logo

$$d_{k-1}(T) = (k-1).d_1(T).$$

Pela alínea (iii') , temos que

$$|T| = |A_1| + \dots + |A_{k-1}| + |A_k| = (k-1).d_1(T) + s,$$

donde concluímos que T é uma s -quasi-transversal de $M^{(k)}$. ■

Se a s -profundidade de M é diferente de 0, a definição de quasi-transversal implica claramente que $t_s(M)$ é igual ao maior inteiro k tal que $M^{(k)}$ contém uma s -quasi-transversal.

Exemplo 3.31 Consideremos de novo o matróide $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ em $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ apresentado no exemplo 3.12.

As 1-quasi-transversais de M são os subconjuntos de S singulares.

$T = \{1, 4\}$ é uma 1-quasi-transversal de $M^{(2)}$ e $T' = \{1, 4, 6\}$ é uma 1-quasi-transversal de $M^{(3)}$.

Atendendo a que o número cromático de M é igual a 3, concluímos de novo que a profundidade de M é $t_1(M) = 3$.

Podemos agora demonstrar o teorema 3.13.

Teorema 3.13 *Seja S um conjunto finito, não vazio e M um matróide em S , sem loops, com aplicação característica d_1 e número cromático c . Então*

$$d(M)' = (t_1(M), t_2(M), \dots, t_n(M))$$

onde $n = d_1(S)$.

Demonstração.

Nas condições do enunciado, seja

$$d(M) = (d_1(S) - d_0(S), d_2(S) - d_1(S), \dots, d_c(S) - d_{c-1}(S))$$

a partição característica de M e

$$d(M)' = (r_1, \dots, r_n)$$

a partição conjugada de $d(M)$, onde $n = d_1(S)$.

Por definição de partição conjugada, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$r_i = |\{j : d_j(S) - d_{j-1}(S) \geq i\}|.$$

Se $r_i = 0$, não existe $j \in \{1, \dots, c\}$ tal que $d_j(S) - d_{j-1}(S) \geq i$. Caso contrário, r_i representa o máximo do conjunto $\{j : d_j(S) - d_{j-1}(S) \geq i\}$.

Seja $s \in \{1, \dots, n\}$. Começemos por ver que $t_s(M) \geq r_s$.

Se $r_s = 0$, o resultado é óbvio. Suponhamos que $r_s = k > 0$. Atendendo à proposição 3.15, consideremos uma família saturada de M , isto é, uma família (B_1, \dots, B_c) de conjuntos independentes em M , disjuntos dois a dois e tais que

$$B_1 \cup \dots \cup B_t$$

é uma base de $M^{(t)}$, para cada $t = 1, \dots, c$.

Então, em particular, $B_1 \cup \dots \cup B_k$ é uma base de $M^{(k)}$ e $B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}$ é uma base de $M^{(k-1)}$. Tendo em conta a demonstração do teorema 3.10, temos

$$|B_k| = d_k(S) - d_{k-1}(S)$$

Atendendo à definição de partição conjugada e ao facto de $r_s = k$, concluímos

$$|B_k| = d_k(S) - d_{k-1}(S) \geq s.$$

Se $k = 1$, então B_1 é uma base de M e logo um conjunto independente em M . Como $|B_1| \geq s$, existem certamente conjuntos independentes em M de cardinalidade superior ou igual a s . Pela definição de s -profundidade, concluímos

$$t_s(M) \geq 1 = k.$$

Suponhamos que $k > 1$. Seja $T \subseteq S$ a transversal máxima de $M^{(k-1)}$ que está contida na base $B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}$ de $M^{(k-1)}$. Pela proposição 3.26,

$$S \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}) \subseteq \overline{T},$$

onde \overline{T} representa o fecho de T em M . Atendendo à definição de família saturada de M , deduzimos que

$$B_k \subseteq S \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}) \subseteq \overline{T}.$$

Como $|B_k| \geq s$ e B_k é independente em M , podemos considerar um subconjunto T_k de B_k que satisfaz $|T_k| = s$. Uma das observações que se encontram imediatamente após a definição de transversal e a proposição 3.30 permitem-nos deduzir que $T \cup T_k$ é uma s -quasi-transversal de $M^{(k)}$. Atendendo à relação existente entre s -profundidade e s -quasi-transversais, concluímos que

$$t_s(M) \geq k = r_s.$$

Vejamos agora que $r_s \geq t_s(M)$. Se $t_s(M) = 0$, o resultado é obviamente verdadeiro. Suponhamos que $t_s(M) = k > 0$.

Tendo em conta a definição de s -profundidade, seja $F \subseteq S$, independente em $M^{(k)}$, tal que $d_{k-1}(F) = (k-1)d_1(F)$ e $|F| = (k-1)d_1(F) + s$.

Sendo F independente em $M^{(k)}$, existe uma base, B , de $M^{(k)}$ que verifica $F \subseteq B$. O lema 3.14 garante-nos a existência de uma família (B_1, \dots, B_k) de conjuntos independentes em M , dois a dois disjuntos, tais que $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ e $B_1 \cup \dots \cup B_t$ é uma base de $M^{(t)}$, para $t = 1, \dots, k$.

Se $|B_k| < s$, então, atendendo a que $F \subseteq B = B_1 \cup \dots \cup B_k$, temos

$$|F \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1})| = |F| - |F \cap B_k| = (k-1)d_1(F) + s - |F \cap B_k| > (k-1)d_1(F).$$

Tal constitui evidentemente uma contradição pois $F \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1})$ é independente em $M^{(k-1)}$, e portanto, verifica $|F \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1})| \leq (k-1)d_1(F)$. Concluímos que $|B_k| \geq s$, ou seja, que

$$d_k(S) - d_{k-1}(S) \geq s.$$

Mas então, $r_s \geq k = t_s(M)$. ■

Os corolários que se seguem decorrem naturalmente do teorema 3.13. O primeiro é consequência do facto da conjugada de uma partição constituir na mesma uma partição e o segundo do facto do comprimento de uma partição ser igual ao primeiro termo da sua conjugada.

Corolário 3.32 *Seja M um matróide em S , sem loops, com número cromático c e dimensão n . A sucessão*

$$t(M) = (t_1(M), t_2(M), \dots, t_n(M))$$

é uma partição de $|S|$, que é designada por partição de profundidade de M .

Corolário 3.33 *Seja M um matróide em S , sem loops, com número cromático c . Então, a profundidade de M é igual ao número cromático de M .*

Exemplo 3.34 Consideremos de novo o matróide $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ referido no exemplo 3.18. Foi visto que a partição característica de M é

$$d(M) = (2, 2, 2).$$

Pelo teorema 3.13, deduzimos que a partição de profundidade de M é

$$t(M) = (t_1(M), t_2(M)) = (2, 2, 2)' = (3, 3).$$

Em particular, a profundidade e o número cromático de M coincidem com 3.

Exemplo 3.35 Seja V um espaço vectorial unitário e seja (e_1, \dots, e_n) uma base de V . Seja $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ e M_γ a partição de multiplicidades de γ . Como verificámos no exemplo 3.19, o matróide vectorial $M = M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})$ satisfaz

$$d(M) = M'_\gamma.$$

Então, pelo teorema 3.13, concluímos que

$$d(M)' = t(M) = M_\gamma,$$

ou seja, a partição de profundidade de M é a partição de multiplicidades de γ .

Capítulo 4

A partição de emparelhamento e a composição de estrelas de um multigrafo bipartido

O conhecido teorema de König, Hall e Egervary afirma que a cardinalidade máxima de um emparelhamento num grafo bipartido é igual ao número mínimo de estrelas cuja união cobre o conjunto de arestas. O resultado dual ainda é verdadeiro, tendo sido estabelecido em 1936 por D. König.

Neste capítulo, abordamos um problema de colorações de arestas que decorre da definição de generalizações dos conceitos de emparelhamento e estrela num multigrafo bipartido. Os resultados expostos podem ser encontrados em [2], [25], [26] e [28].

Ao longo do texto, serão apontadas semelhanças com as estruturas combinatorias consideradas nos capítulos anteriores.

4.1 Motivação e resultados fundamentais

Nesta secção, citamos teoremas clássicos acerca de emparelhamentos e estrelas em grafos bipartidos, que estão na origem do problema de colorações de arestas que vamos abordar. Para mais detalhes, sugerimos [3], [7] e [19].

Seguidamente, enunciamos os principais resultados do capítulo, relegando as demonstrações para a secção seguinte. Os resultados expostos podem ser encontrados em [2], [25], [26] e [28].

Muitos problemas fundamentais relativos a grafos foram inicialmente colocados e resolvidos para grafos bipartidos, pelo que esta família tem particular importância no desenvolvimento da teoria de grafos. Neste capítulo, todas as questões abordadas dizem respeito a multigrafos bipartidos.

Definição 4.1 Seja $G = (V, E)$ um multigrafo. Dizemos que G é um *multigrafo bipartido com bipartição* $\{X, Y\}$ se $V = X \cup Y$ e as arestas de G unem apenas vértices de X a vértices de Y .

Um multigrafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição $\{X, Y\}$ é usualmente representado por $G = (X, Y, E)$, sendo os conjuntos X e Y designados por *classes de bipartição de G* . Atendendo à definição, é evidente que um multigrafo bipartido não admite lacetes.

Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido. Dizemos que G é um *grafo bipartido completo*, se cada vértice de uma classe de bipartição é adjacente a todos os vértices da outra classe. Um grafo bipartido completo com $|X| = p$ e $|Y| = q$ é denotado por $K_{p,q}$.

Exemplo 4.2 O grafo bipartido completo $K_{3,2}$ admite a seguinte representação

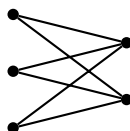


Figura 4.1: Grafo bipartido completo $K_{3,2}$

Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido. Dada uma subfamília F não vazia de E , o multigrafo parcial $G(F)$ é ainda um multigrafo bipartido com bipartição $\{X(F), Y(F)\}$, onde $X(F)$ e $Y(F)$ denotam, respectivamente, os subconjuntos de X e Y cujos vértices incidem em pelo menos uma aresta de F .

Doravante, $G = (X, Y, E)$ representa um multigrafo bipartido, sem vértices isolados, com bipartição $\{X, Y\}$. Consideramos a família de arestas E indexada pelo conjunto $\{1, \dots, m\}$.

Historicamente, o estudo de certas subfamílias de arestas em grafos bipartidos ocupa um lugar central no desenvolvimento da área. Os conceitos que apresentamos de seguida têm particular relevância.

Definição 4.3 Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com bipartição $\{X, Y\}$. Um *emparelhamento* M em G é uma subfamília de E , não vazia, de arestas duas a duas independentes. A cardinalidade máxima de um emparelhamento em G é denotada por $\Lambda(G)$.

Um emparelhamento M em $G = (X, Y, E)$ pode ser encarado como uma aplicação bijectiva entre um conjunto $X' \subseteq X$ e um conjunto $Y' \subseteq Y$, que faz corresponder a cada vértice de X' o único vértice de Y' que pertence a uma aresta de M . Dizemos também que M une X' e Y' . Observamos ainda que a cardinalidade do emparelhamento M é igual à cardinalidade de X' e à de Y' .

Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido e seja M um emparelhamento em G que une $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$. Se $X' = X$, M diz-se um *emparelhamento completo*. Se $X' = X$ e $Y' = Y$, M diz-se um *emparelhamento perfeito*. É fácil verificar que um emparelhamento completo em G é perfeito se e só se $|X| = |Y|$.

Em 1935, P. Hall estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento completo num multigrafo bipartido. Este teorema é conhecido como o *Teorema dos Casamentos de Hall*.

Teorema 4.4 (Hall) [19] *Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido. Existe um emparelhamento completo em G se e só se*

$$|S| \leq |\Gamma_G(S)|, \quad \forall S \subseteq X.$$

Exemplo 4.5 Seja G o multigrafo bipartido representado na figura 4.2.

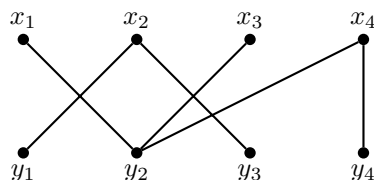


Figura 4.2: Multigrafo bipartido sem emparelhamento completo

É possível verificar directamente que G não admite qualquer emparelhamento completo. De facto, se $S = \{x_1, x_3\}$, temos $\Gamma_G(S) = \{y_2\}$ e logo

$$|S| = 2 > 1 = |\Gamma_G(S)|.$$

De seguida, definimos um conjunto de subfamílias de arestas de G que possuem uma importante relação de dualidade com o conceito de emparelhamento.

Definição 4.6 Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com bipartição $\{X, Y\}$. Uma *estrela* de G é uma subfamília de E constituída por arestas todas incidentes no mesmo vértice.

Se F for uma estrela de G , não é difícil constatar que $G(F)$ é o grafo bipartido completo $K_{n,1}$, onde n representa a cardinalidade de F .

Exemplo 4.7 Consideremos o grafo bipartido G representado na figura 4.2. Temos que a família de arestas $F = (\{x_1, y_2\}, \{x_3, y_2\}, \{x_4, y_2\})$ é uma estrela de G de cardinalidade máxima.

O grafo parcial $G(F)$ é o grafo bipartido completo $K_{3,1}$.

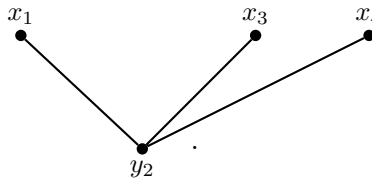


Figura 4.3: Estrela $K_{3,1}$

Um dos resultados mais significativos para o desenvolvimento da teoria de grafos é demonstrado em 1931 por D. König e, de forma independente, por J. Egervary. À semelhança do teorema de Dilworth [2.1], o teorema de König, Hall e Egervary estabelece uma relação entre a cardinalidade máxima de um emparelhamento num grafo bipartido e o número mínimo de estrelas cuja união cobre a família de arestas do grafo. O resultado foi demonstrado para grafos bipartidos, mas pode ser estendido a multigrafos bipartidos.

Teorema 4.8 (König, Hall, Egervary) [19] *Seja $G = (X, Y, E)$ um grafo bipartido. A cardinalidade máxima de um emparelhamento em G é igual ao número mínimo de estrelas cuja união é igual a E .*

Em 1936, D. König demonstra o teorema dual.

Teorema 4.9 (König) [19] *Seja $G = (X, Y, E)$ um grafo bipartido. A cardinalidade máxima de uma estrela de G é igual ao número mínimo de emparelhamentos cuja união é igual a E .*

Por analogia com o procedimento adoptado relativamente a conjuntos parcialmente ordenados, questionamo-nos então acerca da existência de generalizações dos conceitos de emparelhamento e estrela num multigrafo bipartido G . Na próxima secção, veremos que é possível generalizar estes conceitos através das noções de k -emparelhamento e k -estrela.

Torna-se então natural questionar se as cardinalidades máximas dos k -emparelhamentos e das k -estrelas de G dão origem a partições da cardinalidade da família de arestas.

No que diz respeito a k -emparelhamentos, esta questão é solucionada em 1971 por D. de Werra [28].

Teorema 4.10 *Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com família de arestas E , indexada por $\{1, \dots, m\}$. Seja $M_k(G)$ a cardinalidade de um k -emparelhamento máximo de G , $k = 1, \dots, \Delta(G)$. A sucessão*

$$(M_1(G), M_2(G) - M_1(G), \dots, M_{\Delta(G)}(G) - M_{\Delta(G)-1}(G)) \quad (4.1)$$

é uma partição de m .

No início dos anos oitenta, M. Albertson [2] observa que a sucessão correspondente à expressão (4.1) para k -estrelas nem sempre forma uma partição de m . De seguida, coloca a questão de saber que relação existe entre esta última sucessão e a partição (4.1).

Neste capítulo, pretendemos demonstrar o teorema 4.10 e discutir a questão levantada por M. Albertson. Trata-se de um problema importante que se insere no estudo das colorações de arestas de um multigrafo bipartido.

Definição 4.11 *Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido, com família de arestas E indexada por $\{1, \dots, m\}$.*

Seja $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ uma partição de m . Uma partição (U_1, \dots, U_r) da família E diz-se uma μ -coloração de G se, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, são verificadas as seguintes condições:

(i) U_i é um emparelhamento em G ;

(ii) $|U_i| = \mu_i$.

Se existir uma μ -coloração de G , μ diz-se *admissível* para G e G diz-se μ -*colorível*. O conjunto das partições admissíveis para G é denotado por $C(G)$.

Visto que a expressão (4.1) dá origem a uma partição da cardinalidade da família de arestas de G , é ainda pertinente determinar se esta partição é admissível para G . O estudo das partições admissíveis para um multigrafo bipartido deve muito a J. Folkman e D. R. Fulkerson [15] e a D. de Werra [28].

4.2 A partição de emparelhamento e a composição de estrelas de um multigrafo bipartido

Nesta secção, abordamos e discutimos o problema de colorações de arestas enunciado na secção anterior.

As definições e demonstrações apresentadas podem ser encontradas em [2], [3], [25], [26] e [28]. Relativamente à incursão pelos métodos de programação linear, seguimos [19].

No que segue, $G = (X, Y, E)$ representa um multigrafo bipartido, sem vértices isolados, com bipartição $\{X, Y\}$. Consideramos a família de arestas E indexada pelo conjunto $\{1, \dots, m\}$. Salvo indicação em contrário, k denota um inteiro positivo.

Começamos por introduzir as definições de k -emparelhamento e k -estrela de G , definições que generalizam os conceitos de emparelhamento e estrela.

Definição 4.12 Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido e $1 \leq k \leq \Delta(G)$. Seja M uma subfamília de arestas de G . M diz-se um k -emparelhamento de G se o multigrafo parcial de G gerado por M , $G(M)$, tiver grau máximo k . Um k -emparelhamento de cardinalidade máxima é designado por k -emparelhamento máximo de G , sendo a sua cardinalidade representada por $M_k(G)$.

Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com $V = X \cup Y$. É fácil verificar que uma subfamília M de arestas de G é um k -emparelhamento se e só se

$$d_{G(M)}(v) = |\nabla_{G(M)}(v)| \leq k, \quad \forall v \in V.$$

Seja M um emparelhamento em G . Visto que M é uma subfamília de arestas de E duas a duas independentes, $G(M)$ designa um grafo bipartido com todos os vértices de grau 1. É evidente que um emparelhamento é um 1-emparelhamento.

Seja $1 \leq k \leq \Delta(G)$ e seja M um k -emparelhamento de G . Da definição 4.12, deduzimos que a cardinalidade máxima de uma estrela no multigrafo parcial $G(M)$ é igual a k . Então, pelo teorema 4.9, concluímos que M pode ser expresso como a união de k emparelhamentos.

Não podemos deixar de observar a analogia entre as definições e propriedades de k -emparelhamentos em multigrafos bipartidos e k -famílias em conjuntos parcialmente ordenados. Pela bibliografia de [16], é possível que a terminologia relativa a k -famílias tenha sido inspirada pelo conceito de k -emparelhamento e adaptada por C. Greene e D. Kleitman.

Exemplo 4.13 Seja G o grafo bipartido representado na figura 4.4.

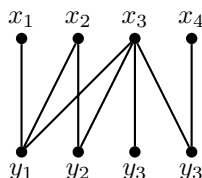


Figura 4.4: Grafo bipartido G

Visto que as arestas adjacentes a vértices de grau 1 têm de pertencer a qualquer emparelhamento máximo, verificamos facilmente que

$$U = (\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\})$$

é o único emparelhamento de G com 4 elementos. Também não é difícil ver que

$$E \setminus (\{x_3, y_1\}, \{x_3, y_3\})$$

é um 2-emparelhamento máximo de G . Então, $M_2(G) = 6$. Como $\Delta(G) = 4$, existem ainda 3-emparelhamentos e 4-emparelhamentos em G .

Definição 4.14 Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido e $1 \leq k \leq \Lambda(G)$. Seja F uma subfamília de arestas de E . F diz-se uma k -estrela de G se F for a união de k estrelas de G .

Uma k -estrela de cardinalidade máxima é designada por k -estrela máxima, sendo a sua cardinalidade representada por $S_k(G)$.

Se atendermos à definição de k -estrela, é evidente que uma estrela de G é uma 1-estrela. Por outro lado, o teorema de König, Hall e Egervary implica que a definição só seja pertinente para $k \leq \Lambda(G)$.

Exemplo 4.15 Consideremos novamente o grafo bipartido G representado na figura 4.4. Dado que $\Delta(G) = 4$ e x_3 é o único vértice de G de grau 4, então

$$F_1 = (\{x_3, y_1\}, \{x_3, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_3, y_4\})$$

é a única estrela de G com 4 elementos. Então, $S_1(G) = 4$. Por outro lado, não é difícil verificar que F_2 é uma 2-estrela máxima de G , onde

$$F_2 = (\{x_3, y_1\}, \{x_3, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_3, y_4\}) \cup (\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}).$$

Então, $S_2(G) = 6$. Do mesmo modo, $S_3(G) = 7$ e $S_4(G) = 8 = |E|$.

O primeiro objectivo deste capítulo consiste em demonstrar que a sucessão

$$(M_1(G), M_2(G) - M_1(G), \dots, M_{\Delta(G)}(G) - M_{\Delta(G)-1}(G))$$

é uma partição de $|E|$, onde E representa a família de arestas de um multigrafo bipartido G . O teorema 4.10 é estabelecido em 1971 por D. de Werra [28].

Nesse sentido, introduzimos definições e resultados referentes a matrizes e programação linear, necessários para a demonstração do teorema 4.10. Seguiremos de perto [19, págs. 257-273].

É de referir que as ligações entre álgebra linear e teoria de grafos são profundas, tendo os primeiros resultados sobre grafos bipartidos sido motivados por um problema acerca do determinante de certas matrizes. Para mais detalhes sobre as ligações entre estas duas áreas, sugerimos [7] e [19].

Relativamente à programação linear, é de notar que o desenvolvimento desta área permitiu a formulação e resolução de muitos problemas acerca de grafos. Para mais detalhes, sugerimos novamente [19].

Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com $V = X \dot{\cup} Y$. Consideramos a família de arestas E indexada por $\{1, \dots, m\}$.

A cada subfamília de arestas F podemos associar um m -uplo, $x^F = (x_1, \dots, x_m)$, onde, para cada $1 \leq j \leq m$,

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se a } j\text{-ésima aresta pertence a } F \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Designamos x^F por *vector de incidência de F* .

O vector de incidência permite uma descrição completa de qualquer subfamília de arestas de G . Observamos que o vector de incidência da família E é o m -uplo cujas entradas são todas iguais a 1. Denotamo-lo por 1^E .

Consideremos um vector $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Se F for uma subfamília de arestas de G , introduzimos a notação $a(F)$ para indicar o produto interno do vector de incidência de F pelo vector a , isto é,

$$a(F) = x^F \cdot a = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ x_j = 1}} a_j.$$

Seja $1 \leq k \leq \Delta(G)$. Atendendo à observação que segue a definição 4.12, não é difícil verificar que um vector $x = (x_1, \dots, x_m)$, com $x_j \in \{0, 1\}$, para $j = 1, \dots, m$, é o vector de incidência de um k -emparelhamento de G se e só se

$$x(\nabla(v)) = x^{\nabla(v)} \cdot x \leq k, \quad \forall v \in V,$$

onde $\nabla(v)$ designa a família de arestas de G incidentes no vértice v .

Na verdade, se x^F for o vector de incidência de uma subfamília de arestas F e $v \in V$, então $x^F(\nabla(v))$ representa o número de arestas de F que incide em v . Então, podemos exprimir a cardinalidade de F através do seu vector de incidência pela expressão

$$|F| = x^F(E) = 1^E \cdot x^F.$$

Determinar um k -emparelhamento máximo num multigrafo bipartido $G = (X, Y, E)$ com $V = X \dot{\cup} Y$, é portanto equivalente a determinar um vector $x = (x_1, \dots, x_m)$ tal que $x_j \in \{0, 1\}$, para $j = 1, \dots, m$, e x é solução do problema

$$\max\{1^E \cdot x : x(\nabla(v)) \leq k, \forall v \in V\}. \quad (4.2)$$

No que se segue, introduzimos uma matriz de grande importância, através da qual vamos poder traduzir e resolver o problema anterior. É de referir que esta matriz pode ser definida para multigrafos que não sejam bipartidos.

Definição 4.16 Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com $V = X \cup Y$. Consideramos o conjunto de vértices V indexado por $\{1, \dots, n\}$ e a família de arestas E por $\{1, \dots, m\}$.

A matriz de incidência de G é a matriz $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a } j\text{-ésima aresta incide no } i\text{-ésimo vértice} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja G um multigrafo bipartido nas condições da definição anterior e A a sua matriz de incidência. Se $1 \leq k \leq \Delta(G)$ e pretendemos determinar um k -emparelhamento máximo em G , basta determinar um vector $x = (x_1, \dots, x_m)$, onde $x_j \in \{0, 1\}$, para $j = 1, \dots, m$, que seja solução do problema $P(k)$

$$\max\{1^E \cdot x = \sum_{j=1}^m x_j : Ax \leq c, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, m\}, \quad (4.3)$$

onde $c = (k, \dots, k)$ tem n componentes.

Consideremos o conjunto

$$\{x = (x_1, \dots, x_m) : Ax \leq c, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, m\} \quad (4.4)$$

onde $c = (k, \dots, k)$ tem n componentes. Trata-se do conjunto de soluções de um sistema de desigualdades lineares, ou seja, de um *poliedro*.

A determinação do máximo de uma função linear sobre um poliedro consiste num problema de programação linear. Os elementos do poliedro são designados por soluções *admissíveis*. Caso existam, as soluções admissíveis que maximizam a função linear são designadas por soluções *ótimas*. Se o poliedro for limitado, então existem soluções ótimas, que são atingidas nos vértices do poliedro.

Se não exigirmos que x seja composto apenas por zeros e uns, o problema (4.3) reduz-se a um problema de programação linear, no qual se pretende maximizar a função linear $1^E \cdot x$ sobre o poliedro limitado (4.4).

No entanto, se provarmos que os vértices do poliedro (4.4) são m -uplos de inteiros, existirá certamente uma solução optimal do problema cujas entradas pertencem a $\{0, 1\}$.

Em 1956, A. J. Hoffman e J. Kruskal determinam uma condição suficiente para que um poliedro tenha vértices inteiros. Uma matriz A diz-se *totalmente unimodular* se toda a submatriz quadrada de A tem determinante igual a 0, 1 ou -1 .

Teorema 4.17 (Hoffman, Kruskal) [19] *Seja A uma matriz do tipo $n \times m$ totalmente unimodular. Se $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_+^n$ e $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}^m$, o poliedro*

$$\{x \in \mathbb{R}^m : b_1 \leq Ax \leq b_2, d_1 \leq x \leq d_2\}$$

tem vértices inteiros.

A matriz de incidência de um multigrafo bipartido apresenta a importante característica de ser totalmente unimodular.

Lema 4.18 *Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido e seja A a matriz de incidência de G . Então, toda a submatriz quadrada de A tem determinante igual a 0, 1 ou -1 .*

Demonstração.

Seja A a matriz de incidência do multigrafo bipartido $G = (X, Y, E)$. Seja Q uma submatriz quadrada de A de ordem r .

A demonstração é por indução em r .

O caso $r = 1$ é óbvio. Consideremos $r > 1$.

As entradas da matriz Q pertencem a $\{0, 1\}$. Se Q apresentar uma coluna cujas entradas são todas iguais a 0, então $\det(Q) = 0$. Se existir uma coluna de Q com uma única entrada não nula, desenvolvemos o determinante de Q segundo essa coluna e concluímos o resultado por indução.

Atendendo a estas observações, podemos assumir que toda a coluna de Q tem exactamente duas entradas iguais a 1.

As linhas da matriz Q correspondem a vértices do multigrafo bipartido G , pelo que é possível particionar as linhas de Q em duas classes de acordo com as classes de bipartição de G . Sem perda de generalidade, consideremos que as primeiras t linhas de Q correspondem a vértices da classe de bipartição X e as restantes $r - t$ a vértices da classe de bipartição Y .

Atendendo a que as colunas de Q representam arestas de G , cada coluna de Q tem exactamente uma entrada não nula nas primeiras t linhas e uma entrada não nula nas últimas $r - t$ linhas. Então, a soma das primeiras t linhas é igual à soma das últimas $r - t$ linhas (igual a $(1, \dots, 1)$) e portanto as linhas de Q são linearmente dependentes.

Concluímos que o determinante de Q é igual a 0. ■

Visto que estamos a considerar multigrafos bipartidos, podemos concluir que existe uma solução optimal do problema (4.3) cujas entradas pertencem a $\{0, 1\}$. Estamos agora em condições de demonstrar o teorema 4.10.

Teorema 4.10 *Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com família de arestas E , indexada por $\{1, \dots, m\}$. Seja $M_k(G)$ a cardinalidade de um k -emparelhamento máximo de G , $k = 1, \dots, \Delta(G)$. A sucessão*

$$(M_1(G), M_2(G) - M_1(G), \dots, M_{\Delta(G)}(G) - M_{\Delta(G)-1}(G))$$

é uma partição de m .

Demonstração.

Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido com família de arestas E indexada por $\{1, \dots, m\}$. Seja $n = \Delta(G)$.

É claro que

$$M_1(G) + M_2(G) - M_1(G) + \dots + M_n(G) - M_{n-1}(G) = M_n(G) = |E| = m.$$

Seja A a matriz de incidência de G . Pelo lema 4.18, A é totalmente unimodular. Pelo que observámos anteriormente, $M_k(G)$ obtém-se determinando $x = (x_1, \dots, x_m)$ tal que $x_i \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \dots, m$, e x é uma solução optimal do problema de programação linear $P(k)$

$$\max\{z = \sum_{j=1}^m x_j : Ax \leq c, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, m\},$$

onde $c = (k, \dots, k)$ tem n componentes.

Seja $1 \leq l \leq n - 1$. Consideremos uma solução optimal do problema $P(l)$, $x^l = (x_1^l, \dots, x_m^l)$, tal que $x_j^l \in \{0, 1\}$, para $j = 1, \dots, m$. Temos claramente que

$$\frac{1}{2}x^{l-1} + \frac{1}{2}x^{l+1}$$

é uma solução admissível para $P(l)$. Então,

$$M_l(G) = \sum_{j=1}^m x_j^l \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m x_j^{l-1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m x_j^{l+1} = \frac{1}{2}M_{l-1}(G) + \frac{1}{2}M_{l+1}(G),$$

ou seja,

$$M_l(G) - M_{l-1}(G) \geq M_{l+1}(G) - M_l(G).$$

■

Podemos agora estabelecer a seguinte definição.

Definição 4.19 Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido, sem vértices isolados e tal que a família de arestas E é indexada pelo conjunto $\{1, \dots, m\}$. Para cada $1 \leq k \leq \Delta(G)$, seja $M_k(G)$ a cardinalidade de um k -emparelhamento máximo de G . A partição de m ,

$$PM(G) = (M_1(G), M_2(G) - M_1(G), \dots, M_{\Delta(G)}(G) - M_{\Delta(G)-1}(G))$$

é designada por *partição de emparelhamento de G* .

A definição de partição de emparelhamento de um multigrafo bipartido é análoga à definição de partição característica de um matróide, o mesmo acontecendo com o conceito de coloração. Visto que a partição característica de um matróide corresponde sempre à sucessão das cardinalidades de uma coloração específica, é natural considerarmos a mesma questão no que concerne multigrafos bipartidos. O exemplo seguinte, que se encontra em [26], mostra que a partição de emparelhamento de um multigrafo bipartido não é necessariamente admissível para o multigrafo em questão.

Exemplo 4.20 [26] Seja G o grafo bipartido representado na figura 4.5.

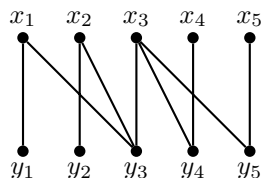


Figura 4.5: Grafo bipartido G

Não é difícil verificar que

$$U = (\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}, \{x_5, y_5\})$$

é o único emparelhamento de G com 5 elementos. Por outro lado, $E \setminus \{x_3, y_3\}$ é um 2-emparelhamento máximo e E é um 3-emparelhamento máximo, pois G tem grau máximo igual a 3. Então

$$PM(G) = (5, 8 - 5, 9 - 8) = (5, 3, 1).$$

A figura 4.6 representa o grafo parcial $G(E \setminus U)$.

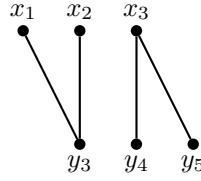


Figura 4.6: $G(E \setminus U)$

Como U é o único emparelhamento de G com 5 elementos e $G(E \setminus U)$ não tem nenhum emparelhamento com 3 elementos, temos que G não é $PM(G)$ -colorível.

Um segundo objectivo deste capítulo consiste em estudar a sucessão correspondente à partição de emparelhamento de G , que se pode formar a partir das k -estrelas máximas de G . Nesse sentido, introduzimos a definição que se segue.

Definição 4.21 Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido, sem vértices isolados e tal que a família de arestas E é indexada pelo conjunto $\{1, \dots, m\}$. Para cada $1 \leq k \leq \Gamma(G)$, seja $S_k(G)$ a cardinalidade de uma k -estrela máxima de G . A sucessão

$$S(G) = (S_1(G), S_2(G) - S_1(G), \dots, S_{\Gamma(G)}(G) - S_{\Gamma(G)-1}(G))$$

é designada por *composição das estrelas de G* , sendo denotada por $S(G)$.

Como observa M. Albertson em [2], a composição de estrelas de um multigrafo bipartido $G = (X, Y, E)$ nem sempre é uma partição de $|E|$. O exemplo que se segue encontra-se em [25].

Exemplo 4.22 [25] Seja G o grafo bipartido representado na figura 4.7.

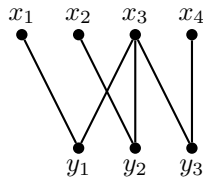


Figura 4.7: Grafo bipartido G

Não é difícil verificar que a partição de emparelhamento de G é igual a

$$PM(G) = (3, 2, 1).$$

Também não é difícil estabelecer que a composição de estrelas de G é dada por

$$S(G) = (3, 1, 2).$$

$S(G)$ não forma uma partição. Observamos no entanto que o fecho por partições de $S(G)$ é dado por $(3, 2, 1)$, isto é, $S(G)^P = (3, 2, 1) = PM(G)$.

No exemplo 4.23, a composição de estrelas do multigrafo bipartido $G = (X, Y, E)$ forma uma partição de $|E| = m$. Neste caso, observamos uma relação de conjugação entre as partições $S(G)$ e $PM(G)$.

Exemplo 4.23 Seja G o grafo bipartido representado na figura 4.8.

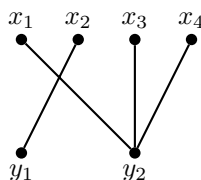


Figura 4.8: Grafo bipartido G

A partição de emparelhamento e a composição de estrelas de G são dadas por

$$PM(G) = (2, 1, 1) \text{ e } S(G) = (3, 1).$$

$S(G)$ forma uma partição do inteiro 4, que é a partição conjugada de $PM(G)$.

Atendendo aos exemplos anteriores, a questão colocada por M. Albertson em [2] surge naturalmente. Torna-se então pertinente determinar a relação entre a partição de emparelhamento e a composição de estrelas de um multigrafo bipartido.

A resolução deste problema exige a definição de um contexto geral para abordar determinados teoremas de dualidade. A definição de ferramentas gerais para a formulação e demonstração deste tipo de resultados é o objecto do próximo capítulo. Neste, daremos resposta à questão de M. Albertson e explicaremos a origem das semelhanças apontadas entre conjuntos parcialmente ordenados, matróides e multigrafos bipartidos.

Capítulo 5

Sucessões e dualidade: um contexto geral

Ao longo deste trabalho, referimos alguns resultados fundamentais da Combinatória como o teorema de Dilworth ou o teorema de König, Hall e Egervary. Tanto um como outro estabelece que o máximo de uma certa quantidade sobre um conjunto de objectos combinatórios é igual ao mínimo de outra quantidade sobre um conjunto de objectos associado ao primeiro. Estes resultados são usualmente designados por teoremas de *minimax* ou *dualidade*.

Na verdade, é possível verificar que o teorema de Dilworth é equivalente ao teorema de König, Hall e Egervary [19, pág. 33], o que sugere a definição de um contexto geral para formular problemas como os que estes resultados retratam.

Neste capítulo, introduzimos a linguagem dos hipergrafos e sobretudo dos pares antibloco de hipergrafos, estabelecendo um contexto de grande generalidade no que respeita à tradução de problemas de dualidade. Seguidamente, associamos várias sucessões inteiras a um hipergrafo e estudamos as relações entre elas. Discutimos os possíveis resultados de dualidade que estas relações traduzem, verificando que os teoremas demonstrados nos capítulos anteriores podem ser encarados como resultados de dualidade provenientes de determinados pares antibloco de hipergrafos.

Esta discussão permite estabelecer a relação entre a partição de emparelhamento e a composição de estrelas de um multigrafo bipartido, respondendo desta forma à questão de M. Albertson, assim como traduzir resultados demonstrados no capítulo 3 acerca de matróides.

Seguimos essencialmente [2], [3], [4], [5], [25] e [29].

5.1 Sobre pares antibloco de hipergrafos

Nesta secção, introduzimos conceitos, notações e resultados associados a hipergrafos. Debruçamo-nos especialmente sobre a noção de par antibloco de hipergrafos, definindo um contexto natural para formular teoremas de dualidade. Estabelecemos ainda uma caracterização fundamental de par antibloco de hipergrafos, segundo um trabalho de M. Saks [25].

Salvo indicação em contrário, os resultados expostos podem ainda ser encontrados em [3], [4] e [29].

Definição 5.1 Um *hipergrafo* é um par $H = (X; \mathcal{E})$, onde X é um conjunto finito, não vazio e \mathcal{E} uma família de subconjuntos de X satisfazendo

$$\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = X.$$

Os elementos de X são designados por *vértices* de H e os conjuntos pertencentes à família \mathcal{E} por *arestas* de H .

Ao longo do capítulo, assumimos que todo o hipergrafo admite o conjunto vazio como aresta. Salvo indicação em contrário, consideramos apenas hipergrafos *simples*, isto é, hipergrafos cujas arestas são todas distintas (e a família de arestas é um conjunto de partes de X).

Seja $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo. Se toda a aresta não vazia de H for um conjunto formado por dois vértices, então $H' = (X, \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\})$ representa um grafo simples. A noção de hipergrafo generaliza o conceito de grafo ao permitir subconjuntos arbitrários de vértices como arestas.

Seja $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo e $Y \subseteq X$. Definimos o *subhipergrafo de H gerado por Y* como sendo o hipergrafo $H_Y = (Y; \mathcal{E}_Y)$, onde

$$\mathcal{E}_Y = \{E \cap Y : E \in \mathcal{E}\}.$$

Seja X um conjunto finito, não vazio. Podemos definir uma relação de ordem parcial no conjunto dos hipergrafos sobre X de forma natural. De facto, se $H = (X; \mathcal{E})$ e $H' = (X; \mathcal{E}')$ forem hipergrafos, estabelecemos que

$$H \leq_H H' \text{ se e só se } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'.$$

É claro que \leq_H determina uma relação de ordem parcial, sendo usualmente representada pelo símbolo \subseteq de inclusão. Denotamos o conjunto parcialmente ordenado dos hipergrafos sobre X por $(H(X), \subseteq)$ ou, abreviadamente, por $H(X)$.

É imediato verificar que $H(X)$ tem máximo. Se $H \in H(X)$, temos

$$H \subseteq p(X),$$

onde $p(X) = (X; \mathcal{P}(X))$ representa o hipergrafo cujo conjunto de arestas é exactamente o conjunto das partes de X .

Doravante, X representa um conjunto finito, não vazio e $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo.

Se o conjunto de arestas do hipergrafo H satisfaz

$$F \subseteq E \in \mathcal{E} \Rightarrow F \in \mathcal{E},$$

dizemos que H é um *ideal*.

Em geral, definimos o *ideal gerado por H* como sendo o hipergrafo sobre X , $H^I = (X; \mathcal{E}^I)$, onde

$$\mathcal{E}^I = \{F \subseteq X : F \subseteq E, \text{ para algum } E \in \mathcal{E}\}.$$

Atendendo à estrutura de $H(X)$, não é difícil mostrar que H^I é o menor ideal que contém H .

No intuito de evidenciar a grande generalidade do conceito de hipergrafo, introduzimos aqui alguns exemplos de hipergrafos que se podem associar às principais estruturas consideradas neste trabalho.

Exemplo 5.2 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Definimos:

- (i) o *hipergrafo das anticadeias de P* como sendo o hipergrafo $A(P) = (P; \mathcal{A}(P))$, cujos vértices são os elementos de P e as arestas as anticadeias de P ;
- (ii) o *hipergrafo das cadeias de P* como sendo o hipergrafo $C(P) = (P; \mathcal{C}(P))$, cujos vértices são os elementos de P e as arestas as cadeias de P .

Para efeitos de completude, consideramos que o conjunto vazio constitui uma anticadeia e uma cadeia de P .

Atendendo a que todo o elemento de P pode ser encarado tanto como anticadeia como cadeia, observamos que os vértices dos hipergrafos $A(P)$ e $C(P)$ podem ser considerados arestas dos mesmos.

Por outro lado, qualquer subconjunto de uma anticadeia de P é ainda uma anticadeia, donde concluímos que $A(P)$ é um ideal. Por motivos semelhantes, $C(P)$ é um ideal.

Exemplo 5.3 Seja S um conjunto finito, não vazio e seja $M = (S, \mathcal{I})$ um matróide em S , sem loops. Consideremos que todos os conjuntos pertencentes à família \mathcal{I} são distintos, ou seja, \mathcal{I} é um conjunto de partes de S .

O matróide $M = (S; \mathcal{I})$ pode ser encarado como um hipergrafo sobre S , correspondendo as arestas aos subconjuntos de S independentes em M . Enquanto hipergrafo, denotamos o matróide M por H_M .

Visto que M não admite loops, todo o conjunto formado por um elemento de S é independente em M . Então, todo o conjunto formado por um vértice constitui uma aresta de H_M .

Observemos ainda que H_M é um ideal, pois todo o subconjunto de um independente em M é ainda independente em M .

Exemplo 5.4 Seja $G = (V, E)$ um grafo, sem lacetes, nem vértices isolados. Definimos:

- (i) o *hipergrafo das cliques de G* como sendo o hipergrafo sobre V , $C(G) = (V; \mathcal{C}(G))$, onde $\mathcal{C}(G)$ é o conjunto das cliques de G ;
- (ii) o *hipergrafo dos independentes de G* como sendo o hipergrafo sobre V , $I(G) = (V; \mathcal{I}(G))$, onde $\mathcal{I}(G)$ é o conjunto dos independentes de G .

É de referir que consideramos que todo o conjunto formado por um vértice de G constitui uma clique e um independente de G . Nesse sentido, todo o conjunto formado por um vértice representa uma aresta de $C(G)$ e de $I(G)$. Assumimos igualmente que $C(G)$ e $I(G)$ admitem o conjunto vazio como aresta.

Como qualquer subconjunto de uma clique de G é ainda uma clique, não é difícil verificar que $C(G)$ é um ideal. Do mesmo modo, $I(G)$ é um ideal.

Por último, observemos que os hipergrafos $C(G)$ e $I(G)$ possuem uma relação muito particular. De facto, referimos no primeiro capítulo que os conjuntos independentes em G são exactamente as cliques de \overline{G} , onde \overline{G} é o grafo complementar de G . Temos portanto que o hipergrafo dos independentes de G é o hipergrafo das cliques de \overline{G} , isto é,

$$I(G) = C(\overline{G}).$$

Os hipergrafos apresentados no exemplo 5.4 são de grande importância, na medida em que muitos problemas de dualidade podem ser traduzidos como problemas de optimização associados a cliques e independentes em grafos.

Tendo em vista a demonstração deste facto, introduzimos aqui algumas noções envolvendo grafos e hipergrafos.

O *grafo associado* ao hipergrafo $H = (X; \mathcal{E})$ é o grafo $G = (X; A)$, cujo conjunto de arestas A é definido por, para quaisquer $x, y \in X$ tais que $x \neq y$,

$$\{x, y\} \in A \text{ se e só se existe } E \in \mathcal{E} \text{ tal que } x, y \in E.$$

Atendendo a esta definição, não é difícil verificar que se H for o hipergrafo das cliques de um grafo G , então G é exactamente o grafo associado a H .

Por outro lado, podemos associar um hipergrafo de cliques a qualquer hipergrafo arbitrário. Com efeito, se $H = (X; \mathcal{E})$ for um hipergrafo, chamamos *completação por cliques* de H ao hipergrafo $H^C = (X; \mathcal{E}^C)$, onde \mathcal{E}^C representa o conjunto das cliques do grafo associado a H .

Observemos uma propriedade elementar da completção por cliques de H . Consideremos o grafo $G = (X, A)$ associado a H e o ideal gerado por H . Por definição, se $F \in \mathcal{E}^I$, então $F \subseteq E$ para algum $E \in \mathcal{E}$ e portanto, para quaisquer $x, y \in F$, temos $\{x, y\} \in A$. Tal significa que F é uma clique de G e, consequentemente, uma aresta de H^C . Concluimos que

$$H^I \subseteq H^C.$$

Se o hipergrafo H for tal que $H^I = H^C$, dizemos que H é *conforme*.

Proposição 5.5 *Seja X um conjunto finito, não vazio. A aplicação de $H(X)$ em $H(X)$ definida por $H \mapsto H^C$ é um operador de fecho no conjunto parcialmente ordenado $H(X)$ cujos elementos fechados são os ideais conformes.*

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$. Como vimos que $H \subseteq H^I \subseteq H^C$, é claro que $H \subseteq H^C$.

Sejam $H = (X; \mathcal{E})$ e $H' = (X; \mathcal{E}')$ hipergrafos tais que $H \subseteq H'$. Seja $E \in \mathcal{E}^C$, isto é, uma clique do grafo associado a H . Dados $x, y \in E$, temos que $\{x, y\}$ está contido numa aresta de H . Como $H \subseteq H'$, $\{x, y\}$ está igualmente contido numa aresta de H' . Concluimos que E é uma clique do grafo associado a H' e portanto $H^C \subseteq H'^C$.

Seja $H \in H(X)$ e G o grafo associado a H . Temos que $H^{CC} = H^C(C(G))$, isto é, H^{CC} é o hipergrafo das cliques do grafo associado a $H^C = C(G)$. Visto que H^C é um hipergrafo de cliques, por uma observação anterior, concluimos que G é o grafo associado a H^C . Então, $H^C = H^{CC}$.

Por último, caracterizemos os elementos fechados de $H(X)$. Atendendo a que $H \subseteq H^I \subseteq H^C$, para qualquer $H \in H(X)$, concluimos que $H \in H(X)$ constitui um elemento fechado se e só se $H = H^I = H^C$, ou seja, se e só se H for um ideal conforme. ■

Tanto no exemplo 5.2 como no exemplo 5.4, para uma determinada estrutura combinatória, apresentámos dois hipergrafos construídos a partir de conceitos duais (anticadeias e cadeias em conjuntos parcialmente ordenados, cliques e independentes em grafos). Estes hipergrafos exemplificam a noção de par antibloco de hipergrafos que apresentamos em seguida.

É de notar que esta noção se revela particularmente fecunda na representação de questões de dualidade. A importância dos hipergrafos de cliques e independentes referida anteriormente advém do facto de estes formarem um par antibloco de hipergrafos especial, facto que demonstramos no final da secção.

Definição 5.6 Seja X um conjunto finito, não vazio. Seja $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo e $Y \subseteq X$. Y diz-se um conjunto *estável* em H se satisfaz

$$|Y \cap E| \leq 1, \forall E \in \mathcal{E}.$$

Se H for o hipergrafo das cliques de um grafo G , os conjuntos estáveis em H são os subconjuntos de X que intersectam cada clique de G no máximo uma vez. Os conjuntos estáveis em H são exactamente os independentes de G .

Definição 5.7 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H, H' \in H(X)$. O hipergrafo H' diz-se *estável relativamente a H* se toda a aresta de H' é um conjunto estável em H . Se H' for estável relativamente a H , então (H, H') diz-se um *par estável* de hipergrafos.

Se o hipergrafo H' for estável relativamente ao hipergrafo H , então é consequência imediata da definição H é estável relativamente a H' . A simetria desta relação está na origem da definição de par estável de hipergrafos.

Definição 5.8 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo. Definimos o *antibloco* de H como sendo o hipergrafo $H^A = (X; \mathcal{E}^A)$, cujo conjunto de arestas \mathcal{E}^A é constituído pelos subconjuntos de X estáveis em H .

Definição 5.9 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H, H' \in H(X)$. Se (H, H') for um par estável de hipergrafos tal que cada um é o antibloco do outro, dizemos que (H, H') forma um *par antibloco de hipergrafos*.

Exemplo 5.10 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Como toda a cadeia de P intersecta qualquer anticadeia de P no máximo uma vez, é claro que o hipergrafo $C(P)$ representa o antibloco de $A(P)$. Do mesmo modo, $A(P)$ é o antibloco de $C(P)$. Concluimos que $(A(P), C(P))$ forma um par antibloco de hipergrafos.

Exemplo 5.11 Seja G um grafo sem lacetes, nem vértices isolados. Como foi observado anteriormente, os conjuntos estáveis de $C(G)$ são exactamente os conjuntos independentes em G , pelo que $I(G)$ representa o antibloco de $C(G)$. Analogamente se verifica que $C(G)$ é o antibloco de $I(G)$, donde concluimos que $(C(G), I(G))$ forma um par antibloco de hipergrafos.

É de notar que o par $(C(G), I(G))$ tem a particularidade de ser constituído por dois hipergrafos de cliques, atendendo a que mostrámos que $I(G) = C(\overline{G})$, onde \overline{G} denota o grafo complementar de G .

No que se segue, demonstramos propriedades importantes envolvendo pares antibloco de hipergrafos. Em particular e como foi anunciado anteriormente, estabelecemos uma relação clara entre pares antibloco de hipergrafos e hipergrafos de cliques e independentes de grafos.

Em [31], D. R. Woodall expõe as seguintes propriedades da relação antibloco.

Proposição 5.12 *Seja X um conjunto finito, não vazio. Para quaisquer hipergrafos $H, H' \in H(X)$, as afirmações seguintes são verdadeiras:*

- (i) *Se $H \subseteq H'$, então $H^A \subseteq H'^A$;*
- (ii) *$H \subseteq H^{AA}$;*
- (iii) *$H^A = H^{AAA}$;*
- (iv) *H^{AA} é o ideal conforme gerado por H .*

Demonstração.

(i) Sejam $H = (X; \mathcal{E})$ e $H' = (X; \mathcal{E}')$ hipergrafos tais que $H \subseteq H'$. Se $Y \subseteq X$ for um conjunto estável em H' , então

$$|Y \cap E'| \leq 1, \forall E' \in \mathcal{E}'.$$

Seja $E \in \mathcal{E}$. Dado que $H \subseteq H'$, temos $E \in \mathcal{E}'$ e logo $|Y \cap E| \leq 1$. Concluimos que o conjunto Y é estável em H e portanto $H^A \subseteq H'^A$.

(ii) Seja $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo e seja $E \in \mathcal{E}$. Como as arestas do antibloco $H^A = (X; \mathcal{E}^A)$ de H são os conjuntos estáveis em H , é claro que $|E \cap E'| \leq 1$, para qualquer $E' \in \mathcal{E}^A$. Deduzimos que E é estável em H^A e logo uma aresta de H^{AA} . Concluimos que $H \subseteq H^{AA}$.

(iii) Seja $H \in H(X)$. Pela alínea (ii), $H \subseteq H^{AA}$, donde, pela alínea (i), $H^{AAA} \subseteq H^A$. Por outro lado, da alínea (ii), também deduzimos que $H^A \subseteq (H^A)^{AA} = H^{AAA}$. Concluimos portanto que $H^A = H^{AAA}$.

(iv) Seja $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo e seja $H^A = (X; \mathcal{E}^A)$ o antibloco de H . Atendendo à definição 5.8, se $F \in \mathcal{E}^A$, então

$$F' \subseteq F \Rightarrow |F' \cap E| \leq |F \cap E| \leq 1, \forall E \in \mathcal{E}.$$

Deduzimos que todo o subconjunto de uma aresta de H^A é ainda uma aresta de H^A e portanto H^A é um ideal.

A observação anterior permite deduzir que H^{AA} é um ideal. Também não é difícil verificar que H^{AA} é um hipergrafo conforme.

Visto que $H \subseteq H^{AA} \subseteq H'$, para qualquer ideal H' satisfazendo $H \subseteq H'$, concluimos que H^{AA} é o ideal conforme gerado por H . ■

A proposição 5.12 estabelece ainda que a aplicação $H \mapsto H^A$ determina um operador de Galois no conjunto parcialmente ordenado $H(X)$. Pela proposição 1.1, concluimos que a aplicação $H \mapsto H^{AA}$ é um operador de fecho em $H(X)$, cujos elementos fechados são os ideais conformes de $H(X)$.

Da definição do operador de fecho anterior, deduzimos uma caracterização fundamental de par antibloco de hipergrafos, estabelecida por M. Saks em [25].

Teorema 5.13 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H, H' \in H(X)$.*

(H, H') forma um par antibloco de hipergrafos se e só se H e H' forem os hipergrafos das cliques de grafos complementares.

Demonstração.

Sejam $H, H' \in H(X)$. (H, H') é um par antibloco de hipergrafos se e só se (H, H') forma um par estável de hipergrafos onde $H' = H^A$ e $H = H^{AA}$.

Pela proposição 5.12, tal é equivalente a H' ser o antibloco de H e H ser um ideal conforme. Pela proposição 5.5, esta condição é equivalente a H' ser o antibloco de H e H o hipergrafo das cliques do grafo G associado a H , ou ainda, $H = H^C = C(G)$ e $H' = H^A = I(G) = C(\overline{G})$. ■

O teorema 5.13 permite concluir que todo o problema de dualidade associado a um par antibloco de hipergrafos pode ser reduzido a um problema envolvendo cliques de grafos complementares. O exemplo que se segue confirma esta ideia.

Exemplo 5.14 *Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Chamamos grafo de comparibilidade de P ao grafo $G(P) = (P, A)$, onde o conjunto de arestas A é definido por*

$$\{x, y\} \in A \text{ se e só se } x \leq y.$$

É claro que uma anticadeia de P corresponde a um conjunto independente no grafo $G(P)$. Do mesmo modo, uma cadeia de P corresponde a uma clique de $G(P)$. Então, o par antibloco de hipergrafos $(A(P), C(P))$ é exactamente o par de hipergrafos das cliques dos grafos complementares $\overline{G(P)}$ e $G(P)$.

É de notar que os grafos de comparibilidade formam uma classe de grafos de grande interesse, tendo o conceito sido adaptado neste exemplo. Para mais detalhes, sugerimos [3] e [5].

5.2 Parâmetros associados a hipergrafos

Nesta secção, definimos os principais parâmetros de um hipergrafo no que respeita à tradução de problemas de dualidade. Seguidamente, discutimos as possíveis relações entre esses parâmetros para pares antibloco de hipergrafos e introduzimos uma classe de grafos de grande importância.

Para mais detalhes, sugerimos [3], [4], [25] e [29].

Ao longo da secção, X é um conjunto finito, não vazio e $H = (X; \mathcal{E})$ é um hipergrafo. Assumimos que H é tal que todo o conjunto constituído por um vértice forma uma aresta.

Como referimos anteriormente, os teoremas de dualidade afirmam que duas quantidades distintas associadas a um objecto combinatório são iguais. Num hipergrafo, é pertinente considerar os escalares que se seguem.

Definição 5.15 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. A *dimensão* do hipergrafo H designa a cardinalidade máxima de uma aresta de H , sendo denotada por $r(H)$.

Definição 5.16 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. O *número de cobertura* do hipergrafo H designa o número mínimo de arestas de H cuja união é igual a X , sendo denotado por $\rho(H)$.

Seja $H \in H(X)$ e $Y \subseteq X$. Uma *H -cobertura* de Y é uma família \mathcal{F} de arestas de H tal que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = Y$. Uma *H -cobertura* \mathcal{F} de Y diz-se uma *H -partição* de Y se as arestas de \mathcal{F} forem duas a duas disjuntas.

Com esta terminologia, torna-se claro que o número de cobertura de H representa o número mínimo de arestas que compõem uma *H -cobertura* de X .

Definição 5.17 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. O *número de estabilidade forte* do hipergrafo H designa a cardinalidade máxima de um conjunto estável em H , sendo denotado por $\alpha(H)$.

No que se segue, discutimos as possíveis relações entre os escalares anteriores para pares antibloco de hipergrafos. Em particular, apontamos os problemas de dualidade que estas relações traduzem.

Seja $H \in H(X)$. Não é difícil verificar que o antibloco H^A de H determina uma relação entre a dimensão de H e o número de cobertura de H^A . De facto, visto que toda a aresta de H^A intersecta cada aresta de H quando muito uma vez, a dimensão de H é limitada superiormente pelo número de arestas de qualquer H^A -cobertura de X . Então

$$r(H) \leq \rho(H^A).$$

Se o par (H, H^A) for tal que $r(H) = \rho(H^A)$, obtemos um teorema de dualidade.

Exemplo 5.18 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e consideremos o par antibloco de hipergrafos $(A(P), C(P))$. É evidente que a dimensão de $A(P)$ corresponde à cardinalidade máxima de uma anticadeia de P e que o número de cobertura de $C(P)$ corresponde ao número mínimo de cadeias cuja união é igual a P . Neste contexto, o teorema de Dilworth pode ser enunciado da seguinte forma

$$r(A(P)) = \rho(C(P)).$$

Do mesmo modo, o teorema de Mirsky afirma que

$$r(C(P)) = \rho(A(P)).$$

O exemplo anterior evidencia a que ponto a linguagem dos pares antibloco de hipergrafos proporciona um contexto geral para traduzir problemas de dualidade de forma especialmente simples. Nesse sentido, é pertinente questionarmos sobre que pares antibloco de hipergrafos (H, H') verificam as igualdades

$$r(H) = \rho(H') \quad \text{e} \quad r(H') = \rho(H).$$

Atendendo ao teorema 5.13, basta colocarmos a questão anterior em termos de cliques e conjuntos independentes em grafos.

Problema 5.19 *Dado um grafo $G = (X, A)$, sem lacetes, nem vértices isolados,*

- (i) *será que a cardinalidade máxima de uma clique de G é igual ao número mínimo de conjuntos independentes em G cuja união é X ?*
- (ii) *será que a cardinalidade máxima de um conjunto independente em G é igual ao número mínimo de cliques de G cuja união é X ?*

É de referir que a cardinalidade máxima de uma clique de um grafo G é habitualmente denotada por $\omega(G)$. Do mesmo modo, $\theta(G)$ designa o número mínimo de cliques cuja união cobre o conjunto de vértices de G e $\alpha(G)$ representa a cardinalidade máxima de um conjunto independente em G . Se H for o hipergrafo das cliques de G , temos

$$r(H) = \omega(G), \quad \rho(H) = \theta(G), \quad \alpha(H) = \alpha(G).$$

Em geral, a resposta ao problema 5.19 é negativa (veja-se [25]). No entanto, torna-se afirmativa se considerarmos o grafo de comparibilidade de um conjunto parcialmente ordenado finito, como consequência dos teoremas de Dilworth e Mirsky. Este caso sugere que estudemos a classe dos grafos perfeitos, classe na qual se inclui o grafo anterior.

Definição 5.20 Seja $G = (X, E)$ um grafo, sem lacetes, nem vértices isolados. Dizemos que G é um grafo *perfeito* se, para cada $Y \subseteq X$, o subgrafo induzido G_Y é tal que a cardinalidade máxima de uma clique de G_Y é igual ao número mínimo de conjuntos independentes em G_Y cuja união é igual a Y .

Em 1972, L. Lovász [20] demonstra um teorema fundamental acerca destes grafos, o famoso *teorema dos grafos perfeitos*.

Teorema 5.21 (Lovász) [20] *Um grafo G é perfeito se e só se o seu complementar \overline{G} for perfeito.*

O teorema dos grafos perfeitos de L. Lovász soluciona o problema 5.19, estabelecendo que a resposta à pergunta (i) é afirmativa para um grafo G e todos os seus subgrafos induzidos se e só se a resposta à pergunta (ii) for afirmativa para G e todos os seus subgrafos induzidos.

O teorema dos grafos perfeitos explica ainda a razão pela qual os resultados de dualidade como os teoremas de Dilworth e Mirsky surgem aos pares. De facto, se G for um grafo perfeito, então o par antibloco de hipergrafos $(C(G), I(G))$ satisfaz

$$r(C(G)) = \rho(I(G)) = \rho(C(\overline{G})),$$

$$r(I(G)) = r(C(\overline{G})) = \rho(C(G)).$$

Por outro lado, se H for o hipergrafo das cliques de um grafo G , observamos que um conjunto estável em H coincide com um conjunto independente em G .

Então, $\alpha(H)$ representa a cardinalidade máxima de um independente em G e portanto $\alpha(C(G)) = r(I(G))$. Do mesmo modo, $\alpha(I(G)) = r(C(G))$.

Se G for um grafo perfeito, então o par antibloco $(C(G), I(G))$ satisfaz

$$r(C(G)) = \rho(I(G)) = \rho(C(\overline{G})) = \alpha(I(G)) = \alpha(\overline{G}),$$

$$r(I(G)) = r(C(\overline{G})) = \rho(C(G)) = \alpha(C(G)).$$

Ao longo do capítulo, voltaremos a considerar esta classe de grafos.

5.3 Sucessões e dualidade

Nesta secção, introduzimos algumas sucessões inteiras que generalizam a dimensão, o número de cobertura e o número de estabilidade forte de um hipergrafo. Do estudo das relações existentes entre estas sucessões, deduzimos teoremas fundamentais para a compreensão dos capítulos anteriores, o que exemplificamos através da tradução no contexto dos hipergrafos dos resultados expostos no segundo capítulo para conjuntos parcialmente ordenados.

Salvo indicação em contrário, os resultados apresentados podem ser encontrados em [3], [4], [25] e [29].

Ao longo da secção, X representa um conjunto finito, não vazio, $H = (X; \mathcal{E})$ um hipergrafo e k um inteiro não negativo. Assumimos que todo o conjunto formado por um vértice de H constitui uma aresta de H .

Definição 5.22 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in \mathcal{H}(X)$. Seja k um inteiro positivo. Dizemos que $Y \subseteq X$ é uma k -aresta se existir uma H -cobertura de Y formada por k arestas. Se $Y \subseteq X$ admitir uma H -partição formada por k arestas, dizemos que Y é uma k -aresta *particionável*.

Não é difícil verificar que se H for um ideal, então toda a k -aresta de H é particionável. Em geral, num hipergrafo arbitrário, podem existir k -arestas que não são particionáveis.

Definição 5.23 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in \mathcal{H}(X)$. Para cada $k \geq 1$, $r_k(H)$ representa a cardinalidade máxima de uma k -aresta de H . Designamos a sucessão inteira $\underline{r}(H) = (r_k(H))_{k \geq 0}$ por *sucessão das dimensões* de H , convencionando que $r_0(H) = 0$.

É evidente da definição que $r_1(H) = r(H)$.

Apresentamos agora a noção de k -norma de uma família de arestas, noção introduzida por M. Saks em [25].

Definição 5.24 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Para cada $k \geq 1$, definimos a k -norma de uma família de arestas \mathcal{F} como sendo

$$|\mathcal{F}|_k^H = \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right|.$$

Caso não exista ambiguidade, denotamos $|\mathcal{F}|_k^H$ simplesmente por $|\mathcal{F}|_k$.

Dada uma família \mathcal{F} de arestas de H , observamos que $|\mathcal{F}|_1$ representa o número de arestas não vazias de \mathcal{F} mais o número de vértices não cobertos por arestas de \mathcal{F} . Visto que assumimos que todo o conjunto formado por um vértice é uma aresta de H , é evidente que se \mathcal{F} for uma H -cobertura de X , então

$$|\mathcal{F}|_k = \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\}, \quad \text{para qualquer } k \geq 1.$$

Definição 5.25 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Para cada $k \geq 1$, $\rho_k(H)$ representa a k -norma mínima de qualquer família de arestas de H . Designamos a sucessão inteira $\underline{\rho}(H) = (\rho_k(H))_{k \geq 0}$ por *sucessão das coberturas por norma* de H , convencionando que $\rho_0(H) = 0$.

Temos claramente que $\rho_1(H)$ corresponde ao número de cobertura de H .

Introduzimos ainda uma extensão do conceito de conjunto estável em H .

Definição 5.26 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Dado um inteiro positivo k , dizemos que $Y \subseteq X$ é um conjunto k -estável em H se

$$|Y \cap E| \leq k, \quad \text{para qualquer } E \in \mathcal{E}.$$

É claro que um conjunto 1-estável em H é exactamente um conjunto estável em H . Por outro lado, para cada inteiro positivo k , temos que a união de k conjuntos 1-estáveis em H é um conjunto k -estável. Contudo, o recíproco desta afirmação não é verdadeiro, como se poderá confirmar adiante considerando o hipergrafo H_M do exemplo 5.59.

Definição 5.27 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Para cada $k \geq 1$, $\alpha_k(H)$ representa a cardinalidade máxima de um conjunto k -estável em H . Designamos a sucessão inteira $\underline{\alpha}(H) = (\alpha_k(H))_{k \geq 0}$ por *sucessão de estabilidade* de H , convencionando que $\alpha_0(H) = 0$.

Pelo que observámos, é imediato que $\alpha_1(H) = \alpha(H)$.

No que se segue, propomo-nos estudar as relações existentes entre as sucessões $\underline{r}(H)$, $\underline{\rho}(H)$ e $\underline{\alpha}(H)$ para um hipergrafo H arbitrário. Começamos por apresentar algumas propriedades básicas.

Proposição 5.28 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Então, as sucessões inteiras $\underline{r}(H)$, $\underline{\rho}(H)$ e $\underline{\alpha}(H)$ pertencem a $D_{|X|}$.*

Demonstração.

Seja $H = (X, \mathcal{E})$ um hipergrafo e seja k um inteiro positivo.

Atendendo a que H admite o conjunto vazio como aresta, toda a k -aresta de H é uma $(k+1)$ -aresta. Então, é claro que

$$r_k(H) \leq r_{k+1}(H), \quad \text{para qualquer } k \geq 1.$$

Por outro lado, se $k = |X|$, então X representa uma k -aresta de H e portanto $r_k(H) = |X|$. Temos obviamente que $r_k(H) \leq |X|$, para qualquer $k \geq 1$. Concluimos que $\underline{r}(H) \in D_{|X|}$.

Seja \mathcal{F} uma família de arestas de H . Temos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}|_{k+1} &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k+1\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}, |F| \leq k} \min\{|F|, k+1\} + \sum_{F \in \mathcal{F}, |F| \geq k+1} \min\{|F|, k+1\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\ &\geq \sum_{F \in \mathcal{F}, |F| \leq k} \min\{|F|, k\} + \sum_{F \in \mathcal{F}, |F| \geq k+1} \min\{|F|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\ &= |\mathcal{F}|_k. \end{aligned}$$

Então, deduzimos que $\rho_k(H) \leq \rho_{k+1}(H)$, para qualquer $k \geq 1$. Tomando $k > \max\{|E| : E \in \mathcal{E}\}$, temos $\rho_k(H) = |X|$. Por outro lado, é claro que $\rho_k(H) \leq |X|$, para qualquer $k \geq 1$. Concluimos que $\underline{\rho}(H) \in D_{|X|}$.
Seja $Y \subseteq X$ um conjunto k -estável em H . Então, para cada $E \in \mathcal{E}$,

$$|Y \cap E| \leq k < k+1.$$

Concluimos que $\alpha_k(H) \leq \alpha_{k+1}(H)$, para qualquer $k \geq 1$. Se k for tal que $k > r(H)$, então $\alpha_k(H) = |X|$. Por último, é fácil verificar que $\alpha_k(H) \leq |X|$, para qualquer $k \geq 1$. Concluimos que $\underline{\alpha}(H) \in D_{|X|}$. ■

Proposição 5.29 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. As sucessões $\underline{r}(H)$, $\underline{\rho}(H)$ e $\underline{\alpha}(H)$ dependem apenas das arestas maximais de H . Consequentemente, estas sucessões coincidem nos hipergrafos H e H^I .*

Demonstração.

Trata-se de uma consequência imediata das definições e do facto dos hipergrafos H e H^I admitirem as mesmas arestas maximais. ■

As proposições que se seguem estabelecem que a sucessão das coberturas por norma é uma sucessão côncava.

Proposição 5.30 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Seja k um inteiro positivo e \mathcal{F} uma família de arestas minimal de k -norma mínima tal que $|\mathcal{F}| = j$. Então, as afirmações seguintes são verdadeiras:*

- (i) *cada aresta de \mathcal{F} tem cardinalidade superior ou igual a $k + 1$;*
- (ii) *\mathcal{F} é uma j -aresta de cardinalidade máxima;*
- (iii) *$\Delta r_{j+1}(H) \leq k$.*

Demonstração.

(i) Nas condições do enunciado, seja $F'' \in \mathcal{F}$. Suponhamos que $|F''| \leq k$. Consideremos a família de arestas $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus F''$. Então

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{F}'|_k &= \sum_{F' \in \mathcal{F}'} \min\{|F'|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| \\
 &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\} + |X| - \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| - |F''| \\
 &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\} + |X| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\
 &= |\mathcal{F}|_k.
 \end{aligned}$$

Tal contradiz a minimalidade de \mathcal{F} e logo concluimos o resultado.

(ii) É claro que \mathcal{F} forma uma j -aresta. Seja \mathcal{F}' uma família arbitrária de arestas constituída por j arestas. Pela minimalidade de $|\mathcal{F}|_k$ e pela alínea (i), temos

$$|\mathcal{F}'|_k \geq |\mathcal{F}|_k = \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| = jk + |X| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right|.$$

Sendo \mathcal{F}' uma j -aresta, também temos

$$|\mathcal{F}'|_k \leq jk + |X| - \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right|,$$

e portanto

$$jk + |X| - \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| \geq jk + |X| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right|,$$

ou ainda,

$$\left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \geq \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right|.$$

Concluimos que \mathcal{F} constitui uma j -aresta de cardinalidade máxima.

(iii) Pela alínea anterior, temos que $r_j(H) = \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right|$. Consideremos uma $(j+1)$ -aresta \mathcal{F}' de cardinalidade máxima. Temos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}'|_k &= \sum_{F' \in \mathcal{F}'} \min\{|F'|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| \\ &\leq (j+1)k + |X| - \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| \\ &= jk + |X| - \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| + k. \end{aligned}$$

Como $|\mathcal{F}|_k \leq |\mathcal{F}'|_k$, deduzimos que

$$|\mathcal{F}|_k = jk + |X| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \leq jk + |X| - \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| + k$$

ou seja,

$$\left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| - k \leq \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right|.$$

Mas então

$$\Delta r_{j+1}(H) = r_{j+1}(H) - r_j(H) = \left| \bigcup_{F' \in \mathcal{F}'} F' \right| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \leq k.$$

■

Proposição 5.31 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Então*

$$\underline{\rho}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H).$$

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$ e seja k um inteiro positivo. Consideremos uma família \mathcal{F} de arestas de H minimal com k -norma mínima. Pela proposição 5.30,

$$\rho_k(H) = |\mathcal{F}|_k = jk + |X| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| = jk + |X| - r_j(H).$$

Como $(\Phi_{\underline{r}}(H))_k = \min_{j \geq 0} \{jk + |X| - r_j(H)\}$, concluímos que

$$\rho_k(H) = (\Phi_{\underline{r}}(H))_k, \quad \text{para qualquer } k \geq 1.$$

Sendo a igualdade evidente no caso $k = 0$, concluímos que $\underline{\rho}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H)$. ■

Corolário 5.32 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. $\underline{\rho}(H)$ é uma sucessão côncava e portanto $\Delta \underline{\rho}(H)$ é uma partição de $|X|$.*

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$. A proposição 5.31 afirma que $\underline{\rho}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H)$. Ora, pelo lema 1.6, tal significa que $\underline{\rho}(H) \in V_{|X|}$, ou seja, $\underline{\rho}(H)$ é uma sucessão côncava. Consequentemente, $\Delta \underline{\rho}(H)$ é uma partição de $|X|$. ■

Visto que todo o conjunto singular constitui uma aresta de H , existe uma família de arestas de H de k -norma mínima que forma uma H -cobertura de X . Consequentemente, para cada $k \geq 1$,

$$\rho_k(H) = \min_{\mathcal{F}} \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\},$$

onde \mathcal{F} varia nas H -coberturas de X .

De seguida, discutimos a existência de uma relação entre $\underline{\rho}(H)$ e $\underline{\alpha}(H)$. É de referir que o teorema 5.33 generaliza um teorema de C. Berge [3, pág. 429].

Teorema 5.33 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Se k for um inteiro positivo, então*

$$\rho_k(H) \geq \max_{W \subseteq X} \left\{ |W| \cdot \min \left\{ 1, \frac{k}{r(H_W)} \right\} \right\} \geq \alpha_k(H).$$

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$ e k um inteiro positivo. Seja \mathcal{F} uma família de arestas de H de k -norma mínima e seja W um subconjunto arbitrário de X . Temos que

$$\begin{aligned} \rho_k(H) &= |\mathcal{F}|_k = \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\ &\geq \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F \cap W|, k\} + \left| \left(X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap W \right| \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}} |F \cap W| \cdot \min \left\{ 1, \frac{k}{|F \cap W|} \right\} + \left| \left(X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap W \right|. \end{aligned}$$

Se $F \in \mathcal{F}$ e H_W representar o subhipergrafo de H induzido por W , temos claramente $|F \cap W| \leq r(H_W)$. Então, para qualquer $W \subseteq X$

$$\rho_k(H) \geq |W| \cdot \min \left\{ 1, \frac{k}{r(H_W)} \right\}.$$

Suponhamos agora que W é um conjunto k -estável em H de cardinalidade máxima. É claro que $r(H_W) \leq k$ e logo

$$\left\{ |W| \cdot \min \left\{ 1, \frac{k}{r(H_W)} \right\} \right\} = |W| = \alpha_k(H).$$

■

Se $k = 1$, o teorema anterior afirma simplesmente que a cardinalidade máxima de um conjunto estável em H é limitada superiormente pelo número mínimo de arestas que cobrem X . O interesse deste teorema reside no facto de generalizar a afirmação anterior para qualquer inteiro positivo k . Em particular, tem como consequência que se \mathcal{F} for uma família de arestas de H , então

$$|\mathcal{F}|_k \geq \alpha_k(H), \text{ para qualquer } k \geq 1.$$

Esta observação sugere a definição de família de arestas k -saturada.

Definição 5.34 Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Seja k um inteiro positivo e \mathcal{F} uma família de arestas de H . \mathcal{F} é k -saturada se verificar

$$|\mathcal{F}|_k = \alpha_k(H).$$

Apresentamos agora uma caracterização de família de arestas k -saturada que se revela particularmente esclarecedora.

Proposição 5.35 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Seja k um inteiro positivo, $W \subseteq X$ um conjunto k -estável em H e \mathcal{F} uma família de arestas de H . As afirmações seguintes são equivalentes:*

- (i) *W é um conjunto k -estável de cardinalidade máxima e \mathcal{F} é uma família de arestas k -saturada;*
- (ii) *$|F \cap W| = \min\{|F|, k\}$, para todo o $F \in \mathcal{F}$ e $\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\right) \cup W = X$.*

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$ e seja k um inteiro positivo. $W \subseteq X$ é um conjunto k -estável de cardinalidade máxima e \mathcal{F} uma família k -saturada se e só se

$$|W| = \alpha_k(H) = |\mathcal{F}|_k.$$

Para todo o conjunto W k -estável em H e toda a família de arestas \mathcal{F} , temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}|_k &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\ &\geq \sum_{F \in \mathcal{F}} |F \cap W| + \left| \left(X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap W \right| = |W|. \end{aligned}$$

Atendendo a esta expressão, deduzimos que $|W| = \alpha_k(H) = |\mathcal{F}|_k$ se e só se

$$\min\{|F|, k\} = |F \cap W|, \forall F \in \mathcal{F} \text{ e } \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| = \left| \left(X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \cap W \right|,$$

o que é ainda equivalente a $\min\{|F|, k\} = |F \cap W|$, para qualquer $F \in \mathcal{F}$ e $\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\right) \cap W = X$. ■

Atendendo a que $\Delta_{\underline{\rho}}(H)$ constitui uma partição de $|X|$, torna-se natural considerar as implicações para $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ da existência de famílias k -saturadas.

Teorema 5.36 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$.*

As afirmações seguintes são equivalentes:

- (i) *H admite famílias de arestas k -saturadas, para qualquer $k \geq 1$;*
- (ii) *$\underline{\alpha}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H) = \underline{\rho}(H)$;*
- (iii) *$\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ é uma partição de $|X|$, cuja partição conjugada é $(\Delta_{\underline{r}}(H))^P$, isto é, o fecho por partições de $\Delta_{\underline{r}}(H)$.*

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$. Se H admitir famílias de arestas k -saturadas, para qualquer inteiro positivo k , então

$$\rho_k(H) \leq \alpha_k(H), \quad \text{para qualquer } k \geq 1.$$

Pelo teorema 5.33, concluímos que $\underline{\alpha}(H) = \underline{\rho}(H)$ e, pela proposição 5.31, que $\underline{\alpha}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H) = \underline{\rho}(H)$.

Reciprocamente, suponhamos que H é tal que $\underline{\alpha}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H) = \underline{\rho}(H)$. Então,

$$\rho_k(H) = \alpha_k(H), \quad \text{para qualquer } k \geq 1.$$

Tal significa que, para qualquer inteiro positivo k , existe uma família \mathcal{F} de arestas de H que verifica $|\mathcal{F}|_k = \alpha_k(H)$, ou seja, H admite famílias de arestas k -saturadas, para qualquer inteiro positivo k .

A equivalência entre (ii) e (iii) é uma consequência directa do teorema 1.11. ■

Tendo em conta as propriedades das sucessões inteiras estabelecidas no primeiro capítulo, deduzimos que, em certas condições, a relação entre as composições $\Delta_{\underline{r}}(H)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ é de conjugação.

Teorema 5.37 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ e $\Delta_{\underline{r}}(H)$ são partições conjugadas se e só se $\underline{\alpha}(H) = \underline{\rho}(H)$ e $\underline{r}(H)$ é côncava.*

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$. Atendendo ao teorema 5.36, $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ e $\Delta_{\underline{r}}(H)$ são partições conjugadas se e só se $\underline{\alpha}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H) = \underline{\rho}(H)$ e $(\Delta_{\underline{r}}(H))^P = \Delta_{\underline{r}}(H)$. Pela definição de fecho por partições, concluímos que tal é equivalente a termos $\underline{\alpha}(H) = \underline{\rho}(H)$ e $\underline{r}(H)$ ser uma sucessão côncava. ■

Exemplo 5.38 *Seja H o hipergrafo das anticadeias do conjunto parcialmente ordenado $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ cujo diagrama está representado na figura 5.1.*

Não é difícil verificar que

$$\Delta_{\underline{r}}(H) = \Delta_{\underline{\alpha}}(H) = \Delta_{\underline{\rho}}(H) = (3, 2, 1, 0, \dots).$$

Atendendo a que $(3, 2, 1, 0, \dots)' = (3, 2, 1, 0, \dots)$, o teorema 5.36 permite afirmar que H admite famílias k -saturadas, para qualquer inteiro positivo k .

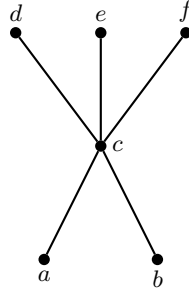


Figura 5.1: Diagrama de Hasse de P

O exemplo anterior parece sugerir que a existência de famílias de arestas k -saturadas, para qualquer k , tem como consequência $\Delta_{\underline{r}}(H)$ ser uma partição. O exemplo seguinte deve-se a C. Greene e mostra que existem hipergrafos H que têm famílias de arestas k -saturadas, para todo o k , sem que $\underline{r}(H)$ seja côncava.

Exemplo 5.39 [17] Seja H o hipergrafo dos independentes do grafo G representado na figura 5.2.

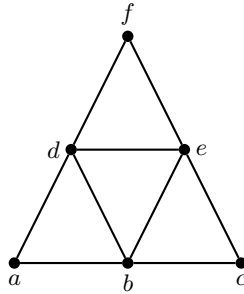


Figura 5.2: Grafo G

Não é difícil verificar que H admite famílias de arestas k -saturadas, para qualquer inteiro positivo k . De facto,

k	família k -saturada	$ \mathcal{F} _k$
1	$\mathcal{F} = (\{a, e\}, \{c, d\}, \{b, f\})$	$ \mathcal{F} _1 = 3 = \alpha_1(H)$
2	$\mathcal{F} = (\{a, c, f\}, \{b\}, \{d\}, \{e\})$	$ \mathcal{F} _2 = 5 = \alpha_2(H)$
≥ 3	$\mathcal{F} = (\{a, c, f\}, \{b\}, \{d\}, \{e\})$	$ \mathcal{F} _k = 6 = \alpha_k(H)$

No entanto, verifica-se facilmente que

$$\Delta_{\underline{\alpha}}(H) = (3, 2, 1, 0, \dots) \in P_6,$$

$$\Delta_{\underline{r}}(H) = (3, 1, 2, 0, \dots) \notin P_6.$$

A proposição 5.40 deve-se a C. Greene e clarifica em que condições a existência de famílias k -saturadas implica que $\Delta_{\underline{r}}(H)$ seja uma partição.

Proposição 5.40 [17] *Seja X um conjunto finito, não vazio. Se $H \in H(X)$ for tal que, para cada $W \subseteq X$, o hipergrafo H_W possui partições simultaneamente k -saturadas e $(k+1)$ -saturadas para qualquer inteiro positivo k , então $\underline{r}(H)$ é côncava e logo $\Delta_{\underline{r}}(H)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ são partições conjugadas.*

Retomando o exemplo 5.39, observamos que a condição da existência, para qualquer $k \geq 1$, de famílias que sejam simultaneamente k -saturadas e $(k+1)$ -saturadas não pode ser reduzida à existência de famílias k -saturadas.

A existência de famílias que sejam simultaneamente k -saturadas e $(k+1)$ -saturadas para qualquer inteiro positivo k é um fenômeno de interesse que se verifica nalguns hipergrafos. Por analogia com a terminologia introduzida por A. J. Hoffman e D. E. Schwartz [18] relativamente aos hipergrafos das anticadeias e cadeias de conjuntos parcialmente ordenados, designamos este fenômeno por *t-fenômeno*.

A proposição que se segue afirma que a verificação do t -fenômeno num hipergrafo H é uma consequência de $\Delta_{\underline{r}}(H)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ serem partições conjugadas.

Proposição 5.41 *Seja X um conjunto finito, não vazio e $H \in H(X)$. Se $\Delta_{\underline{r}}(H)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ forem partições conjugadas, então, para cada inteiro positivo k , existe uma família de arestas \mathcal{F} que é simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada, isto é,*

$$|\mathcal{F}|_k = \alpha_k(H) \quad \text{e} \quad |\mathcal{F}|_{k+1} = \alpha_{k+1}(H).$$

Demonstração.

Seja $H \in H(X)$ e seja k um inteiro positivo. Suponhamos que $\Delta_{\underline{r}}(H)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ são partições conjugadas.

Pelo teorema 5.37 e pela proposição 5.31, temos $\underline{\alpha}(H) = \Phi_{\underline{r}}(H) = \underline{\rho}(H)$ e $\underline{r}(H)$ é uma sucessão côncava. Atendendo à proposição 1.7, existe um inteiro j que realiza simultaneamente $(\Phi_{\underline{r}}(H))_k$ e $(\Phi_{\underline{r}}(H))_{k+1}$. Então

$$\alpha_k(H) = |X| - r_j(H) + jk \quad \text{e} \quad \alpha_{k+1}(H) = |X| - r_j(H) + j(k+1).$$

Seja Y uma j -aresta de cardinalidade máxima e \mathcal{F} uma H -cobertura de Y formada por j arestas. \mathcal{F} satisfaz

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}|_k &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \min\{|F|, k\} + \left| X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| = jk + |X| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\ &= jk + |X| - r_j(H) = \alpha_k(H) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}|_{k+1} &= j(k+1) + |X| - \left| \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right| \\ &= j(k+1) + |X| - r_j(H) = \alpha_{k+1}(H). \end{aligned}$$

■

Terminamos esta secção expondo as relações entre as sucessões das dimensões, das coberturas por norma e de estabilidade que surgem num par antibloco de hipergrafos.

Proposição 5.42 *Seja X um conjunto finito, não vazio e (H, H') um par estável de hipergrafos sobre X . As afirmações seguintes são verdadeiras:*

- (i) $\underline{\alpha}(H) \geq_D \underline{r}(H')$;
- (ii) $\Phi_{\underline{r}}(H) \geq_D \underline{r}(H')$;
- (iii) $(\Delta_{\underline{r}}(H)^P)' \geq_C \Delta_{\underline{r}}(H')$.

Demonstração.

(i) Seja (H, H') um par estável de hipergrafos sobre X e seja k um inteiro positivo. É claro que toda a k -aresta de H' é k -estável em H , donde concluímos

$$r_k(H') \leq \alpha_k(H), \quad \text{para qualquer } k \geq 1.$$

Então

$$\underline{\alpha}(H) \geq_D \underline{r}(H').$$

(ii) Pela alínea (i), temos $\underline{\alpha}(H) \geq_D \underline{r}(H')$. Pelo teorema 5.33, deduzimos

$$\underline{\rho}(H) \geq_D \underline{\alpha}(H).$$

Atendendo à proposição 5.31, concluímos que

$$\Phi \underline{r}(H) = \underline{\rho}(H) \geq_D \underline{\alpha}(H) \geq_D \underline{r}(H').$$

(iii) Pela alínea anterior, sabemos que $\Phi \underline{r}(H) \geq_D \underline{r}(H')$. O isomorfismo de ordem apresentado na proposição 1.5, $\Delta : D_{|X|} \rightarrow C_{|X|}$, permite afirmar que

$$\Delta \Phi \underline{r}(H) \geq_C \Delta \underline{r}(H').$$

Então, pelo teorema 1.11, concluímos que

$$\Delta \Phi \underline{r}(H) = (\Delta \Phi \underline{r}(H))^P \geq_C \Delta \underline{r}(H').$$

■

Consideremos um par antibloco (H, H') de hipergrafos sobre X . Tendo em consideração os resultados anteriores, concluímos que as relações entre as sucessões \underline{r} , $\underline{\rho}$ e $\underline{\alpha}$ associadas a H e H' podem ser resumidas por

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\rho}(H') & \geq_D & \underline{\alpha}(H') & \geq_D & \underline{r}(H) \\ \uparrow \Phi & & & & \downarrow \Phi \\ \underline{r}(H') & \leq_D & \underline{\alpha}(H) & \leq_D & \underline{\rho}(H) \end{array}$$

e também por

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta \underline{\rho}(H') & \geq_C & \Delta \underline{\alpha}(H') & \geq_C & \Delta \underline{r}(H)^P & \geq_C & \Delta \underline{r}(H) \\ & & \downarrow' & & \uparrow' & & \\ \Delta \underline{r}(H') & \leq_C & \Delta \underline{r}(H')^P & \leq_C & \Delta \underline{\alpha}(H) & \leq_C & \Delta \underline{\rho}(H) \end{array}$$

Deduzimos portanto que se $\Delta \underline{r}(H)$ e $\Delta \underline{r}(H')$ forem partições conjugadas, todas as desigualdades apresentadas tornam-se igualdades.

O contexto unificador dos pares antibloco de hipergrafos permite ler os resultados de dualidade obtidos para conjuntos parcialmente ordenados como um caso particular de uma linguagem geral.

Exemplo 5.43 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito e consideremos o par antibloco de hipergrafos $(A(P), C(P))$. Não é difícil verificar que as sucessões \underline{r} , $\underline{\rho}$ e $\underline{\alpha}$ correspondem, para qualquer inteiro não negativo k , a:

$$\begin{aligned} r_k(A(P)) &= d_k(P), & r_k(C(P)) &= \hat{d}_k(P), \\ \alpha_k(A(P)) &= \hat{d}_k(P), & \alpha_k(C(P)) &= d_k(P), \end{aligned}$$

$$\rho_k(A(P)) = \min\{\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}(P)}\} \text{ e } \rho_k(C(P)) = \min\{\beta_k(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \overline{\mathcal{C}(P)}\},$$

onde $\overline{\mathcal{A}(P)}$ e $\overline{\mathcal{C}(P)}$ denotam, respectivamente, o conjunto das \mathcal{A} -partições de P e o conjunto das \mathcal{C} -partições de P .

O teorema de Greene-Kleitman afirma que

$$\underline{r}(A(P)) = \underline{\rho}(C(P)) = \underline{\alpha}(C(P))$$

e o teorema de Greene traduz-se pela igualdade

$$\underline{r}(C(P)) = \underline{\rho}(A(P)) = \underline{\alpha}(A(P)).$$

Tal significa evidentemente que os hipergrafos $A(P)$ e $C(P)$ admitem famílias k -saturadas para qualquer inteiro positivo k . O teorema 5.36 permite entender em que medida o teorema 2.16 decorre dos resultados anteriores.

Na verdade, C. Greene e D. Kleitman [16] provaram que o hipergrafo $C(P)$ admite famílias de arestas simultaneamente k -saturadas e $(k+1)$ -saturadas, para qualquer inteiro positivo k (teorema 2.53). A proposição 5.41 estabelece que se trata de uma consequência do teorema 2.16. Atendendo a que a sucessão $\underline{r}(C(P))$ é côncava, concluímos que o teorema de Greene-Kleitman e o teorema 2.16 são equivalentes.

5.4 O par antibloco dos hipergrafos das cliques e dos independentes de um grafo

Nesta secção, traduzimos os resultados apresentados para hipergrafos arbitrários na linguagem dos grafos, prestando especial atenção à classe dos grafos perfeitos. Das considerações acerca deste tipo de grafos respondemos à questão de M. Albertson [2] exposta no capítulo anterior.

Para mais detalhes, sugerimos [2], [3], [5] e [25].

Ao longo da secção, $G = (X, A)$ representa um grafo, sem lacetes e sem vértices isolados. Assumimos que o conjunto vazio assim como os conjuntos formados por um vértice de G constituem cliques e independentes em G .

Como observámos anteriormente, se H for o hipergrafo das cliques do grafo G , a dimensão, o número de cobertura e o número de estabilidade forte de H correspondem, respectivamente, aos seguintes parâmetros de G :

- (i) a cardinalidade máxima de uma clique de G , denotada por $\omega(G)$;
- (ii) o número mínimo de cliques cuja união é igual a X , denotado por $\theta(G)$;
- (iii) a cardinalidade máxima de um conjunto independente em G , denotada por $\alpha(G)$.

É evidente que se $H = C(G)$ então $\omega(G) = r(H)$, $\theta(G) = \rho(H)$ e $\alpha(G) = \alpha(H)$.

Atendendo aos resultados demonstrados na secção anterior, é pertinente considerar as sucessões correspondentes a $\underline{r}(H)$, $\underline{\rho}(H)$ e $\underline{\alpha}(H)$ para um hipergrafo H que represente o hipergrafo das cliques de um grafo. Nesse sentido, introduzimos ainda alguma terminologia.

Definição 5.44 Seja $G = (X, A)$ um grafo e seja k um inteiro positivo. Sejam $Y \subseteq X$ e \mathcal{D} uma família de cliques de G . Dizemos que

- (i) Y é uma k -clique de G se Y for união de k cliques de G ;
- (ii) Y é um conjunto k -independente em G se Y intersecta cada clique de G no máximo k vezes;
- (iii) \mathcal{D} é uma cobertura por cliques de G se $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D = X$.

Se H for o hipergrafo das cliques de G , é claro que, para qualquer inteiro positivo k , uma k -clique de G representa uma k -aresta de H e um conjunto k -independente em G representa um conjunto k -estável em H .

Com esta terminologia, associamos de forma natural três sucessões a um grafo arbitrário.

Definição 5.45 Seja $G = (X, A)$ um grafo. Definimos:

- (i) a sucessão das cliques de G como sendo a sucessão $\underline{\omega}(G) = (\omega_k(G))_{k \geq 0}$, onde $\omega_0(G) = 0$ e, para cada $k \geq 1$, $\omega_k(G)$ representa a cardinalidade máxima de uma k -clique de G ;

- (ii) a *sucessão das coberturas por cliques* de G como sendo a sucessão $\underline{\theta}(G) = (\theta_k(G))_{k \geq 0}$, onde $\theta_0(G) = 0$ e, para cada inteiro $k \geq 1$, $\theta_k(G) = \min_{\mathcal{D}} \sum_{D \in \mathcal{D}} \min\{|D|, k\}$, onde \mathcal{D} varia nas coberturas por cliques;
- (iii) a *sucessão dos independentes* de G como sendo a sucessão $\underline{\alpha} = (\alpha_k(G))_{k \geq 0}$, onde $\alpha_0(G) = 0$ e, para cada $k \geq 1$, $\alpha_k(G)$ representa a cardinalidade máxima de um conjunto k -independente em G .

Tendo em conta os resultados expostos acerca de hipergrafos, deduzimos imediatamente algumas relações entre as sucessões $\underline{\omega}$, $\underline{\theta}$ e $\underline{\alpha}$.

Proposição 5.46 *Seja G um grafo e \overline{G} o seu complementar. Então*

$$\Phi_{\underline{\omega}}(G) = \underline{\theta}(G) \geq_D \underline{\alpha}(G) \geq_D \underline{\omega}(\overline{G}).$$

Demonstração.

Nas condições do enunciado, seja o hipergrafo das cliques de G , $H=C(G)$, e o hipergrafo dos independentes de G , $H' = I(G) = C(\overline{G})$. Como notámos anteriormente, (H, H') forma um par antibloco de hipergrafos. Então, pela proposição 5.42, temos

$$\Phi_{\underline{r}}(H) = \underline{\rho}(H) \geq_D \underline{\alpha}(H) \geq_D \underline{r}(H').$$

Atendendo à terminologia e observações efectuadas nesta secção, concluímos

$$\Phi_{\underline{\omega}}(G) = \underline{\theta}(G) \geq_D \underline{\alpha}(G) \geq_D \underline{\omega}(\overline{G}).$$

■

Pelo que mostrámos na secção anterior, num hipergrafo H , a existência de famílias k -saturadas tem implicações nas composições $\Delta_{\underline{r}}(H)$, $\Delta_{\underline{\rho}}(H)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$. No que se segue, debruçamo-nos sobre a noção de família k -saturada em grafos.

Definição 5.47 *Seja $G = (X, A)$ um grafo e seja k um inteiro positivo. Uma cobertura por cliques \mathcal{D} diz-se k -saturada se satisfaz*

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} \min\{|D|, k\} = \alpha_k(G).$$

O teorema 5.36 e a proposição 5.35 permitem estabelecer o teorema seguinte.

Teorema 5.48 *Seja $G = (X, A)$ um grafo. G admite coberturas por cliques k -saturadas para qualquer inteiro positivo k se e só se $\Delta_{\underline{\omega}}(G)^P$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(G)$ forem partições conjugadas. Se, além disso, $\underline{\omega}(G)$ for uma sucessão côncava, então $\Delta_{\underline{\omega}}(G)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(G)$ são partições conjugadas.*

Demonstração.

Seja G um grafo e seja H o hipergrafo das cliques de G . É claro que G admite coberturas por cliques k -saturadas para qualquer inteiro positivo k se e só se H admite famílias de arestas k -saturadas para qualquer inteiro positivo k .

Pelo teorema 5.36, tal é equivalente a $\Delta_{\underline{\alpha}}(H)$ e $\Delta_{\underline{r}}(H)^P$ serem partições conjugadas, o que é o mesmo que $\Delta_{\underline{\alpha}}(G)$ e $\Delta_{\underline{\omega}}(G)^P$ serem partições conjugadas. É óbvio que se $\underline{\omega}(G)$ for uma sucessão côncava, então $\Delta_{\underline{\omega}}(G)$ é uma partição e logo $\Delta_{\underline{\omega}}(G)^P = \Delta_{\underline{\omega}}(G)$. ■

O teorema anterior explicita em que condições podemos encontrar uma relação entre as composições $\Delta_{\underline{\omega}}(G)$ e $\Delta_{\underline{\alpha}}(G)$ para um grafo G arbitrário.

Na segunda secção deste capítulo, apresentámos uma classe de grafos para a qual $\omega(G)$, $\theta(G)$, $\alpha(G)$, $\omega(\overline{G})$, $\theta(\overline{G})$ e $\alpha(\overline{G})$ se relacionavam de forma especialmente interessante, traduzindo resultados de dualidade importantes. Nesse sentido, é pertinente questionarmo-nos acerca das relações entre as sucessões $\underline{\omega}$, $\underline{\theta}$ e $\underline{\alpha}$ no caso particular dos grafos perfeitos.

Começamos por observar que os resultados obtidos para $k = 1$ se generalizam para qualquer inteiro positivo.

Proposição 5.49 *Seja G um grafo perfeito. Então,*

$$\underline{\alpha}(\overline{G}) = \underline{\omega}(G) \quad \text{e} \quad \underline{\alpha}(G) = \underline{\omega}(\overline{G}).$$

Demonstração.

Seja G um grafo perfeito. Pelo teorema 5.21, \overline{G} é igualmente perfeito.

Seja k um inteiro positivo e seja $Y \subseteq X$ um conjunto k -independente em \overline{G} de cardinalidade máxima. Atendendo a que G é perfeito, temos

$$\theta_1(G_Y) = \alpha_1(G_Y) = \omega(\overline{G}_Y) \leq k.$$

Então $\theta_1(G_Y) \leq k$. Tendo em consideração a definição de θ_1 , deduzimos que Y admite uma cobertura constituída por k cliques de G . Mas então

$$\omega_k(G) \geq |Y| = \alpha_k(\overline{G}).$$

Pela proposição 5.46, concluímos que

$$\omega_k(G) = \alpha_k(\overline{G}), \text{ para qualquer } k \geq 1.$$

Como \overline{G} é perfeito, estabelecemos a segunda igualdade analogamente. ■

Uma consequência do resultado anterior consiste no facto das sucessões $\underline{\omega}$, $\underline{\theta}$ e $\underline{\alpha}$ associadas a um grafo perfeito G serem todas determinadas por $\underline{\omega}(G)$ e $\underline{\omega}(\overline{G})$. De facto, se G for perfeito, então, pelas proposições 5.46 e 5.49, temos

$$\Phi_{\underline{\alpha}}(\overline{G}) = \Phi_{\underline{\omega}}(G) = \underline{\theta}(G) \geq_D \underline{\alpha}(G) = \underline{\omega}(\overline{G}).$$

Exemplo 5.50 Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. Visto que observámos que o grafo de comparibilidade $G(P)$ é um grafo perfeito, podemos enunciar o teorema 2.16 dizendo que $\Delta_{\underline{\omega}}(G(P))$ e $\Delta_{\underline{\omega}}(\overline{G(P)})$ são partições conjugadas.

Embora o exemplo anterior possa sugerir-lo, é de referir que nem sempre um grafo perfeito G é tal que $\Delta_{\underline{\omega}}(G)$ e $\Delta_{\underline{\omega}}(\overline{G})$ sejam partições conjugadas.

Retomando o exemplo 5.39, observamos que o grafo G representado na figura 5.2 é um grafo perfeito. Não é difícil verificar que

$$\Delta_{\underline{\omega}}(\overline{G}) = (3, 2, 1, 0, \dots).$$

No entanto, foi estabelecido que

$$\Delta_{\underline{\omega}}(G) = (3, 1, 2, 0, \dots),$$

não se tratando claramente de partições conjugadas de 6.

O teorema que se segue clarifica as condições necessárias para que $\Delta_{\underline{\omega}}(G)$ e $\Delta_{\underline{\omega}}(\overline{G})$ sejam partições conjugadas, no caso de G ser um grafo perfeito.

Teorema 5.51 *Seja G um grafo perfeito. Então, $\Delta_{\underline{\omega}}(G)$ e $\Delta_{\underline{\omega}}(\overline{G})$ são partições conjugadas se e só se $\underline{\theta}(G) = \underline{\alpha}(G)$ e $\underline{\omega}(G)$ for uma sucessão côncava.*

Demonstração.

Trata-se de uma consequência directa do teorema 5.48 e da proposição 5.49. ■

Estamos agora em condições de responder à questão colocada por M. Albertson em [2], isto é, qual a relação existente entre a partição de emparelhamento e a composição de estrelas de um multigrafo bipartido.

Começamos por introduzir algumas noções e resultados que permitem traduzir a questão anterior no contexto dos grafos perfeitos.

Definição 5.52 Seja G um grafo. Dizemos que G é *unimodular* se a matriz de incidência de G é totalmente unimodular.

É de observar que definimos a matriz de incidência em 4.16 para um multigrafo bipartido, sendo a definição análoga no caso de um grafo arbitrário.

Como vimos no lema 4.18, os grafos bipartidos são unimodulares.

Os grafos unimodulares têm uma propriedade fundamental que é a existência de coberturas por cliques k -saturadas para qualquer inteiro positivo k . A demonstração remete para programação linear e pode ser encontrada em [25].

Proposição 5.53 [25] *Seja G um grafo unimodular. Então, para todo o inteiro $k \geq 1$,*

$$\alpha_k(G) = \theta_k(G).$$

Em [5], C. Berge observa que os grafos unimodulares são perfeitos. Atendendo aos resultados obtidos para esta classe de grafos, deduzimos uma propriedade surpreendente dos grafos unimodulares.

Teorema 5.54 *Seja G um grafo unimodular. Então $\Delta_{\underline{\omega}}(\overline{G})$ é uma partição cuja conjugada é o fecho por partições de $\Delta_{\underline{\omega}}(G)$.*

Demonstração.

Seja G um grafo unimodular. Então, pela proposição 5.53, $\underline{\alpha}(G) = \underline{\theta}(G)$. Pela proposição 5.46, temos que $\Phi_{\underline{\omega}}(G) = \underline{\theta}(G)$, donde concluímos que $\Phi_{\underline{\omega}}(G) = \underline{\alpha}(G)$. Por outro lado, sendo G perfeito, a proposição 5.49 permite afirmar que $\Phi_{\underline{\omega}}(G) = \underline{\omega}(\overline{G})$. O resultado decorre do teorema 1.11. ■

Definição 5.55 Seja G um grafo. Chamamos grafo *adjunto* de G ao grafo $L(G)$, cujos vértices são as arestas de G e uma aresta incide em dois vértices de $L(G)$ se as arestas correspondentes em G forem adjacentes.

Em [5], C. Berge observa que se G for um multigrafo bipartido, o grafo adjunto $L(G)$ é um grafo unimodular. Este facto é crucial no estabelecimento da relação entre a partição de emparelhamento e a composição de estrelas de G , que apresentamos de seguida.

Teorema 5.56 *Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido. Seja $\underline{M}(G) = (M_k(G))_{k \geq 0}$, onde, para cada inteiro $k \geq 0$, $M_k(G)$ representa a cardinalidade de um k -emparelhamento máximo de G e seja $\underline{S}(G) = (S_k(G))_{k \geq 0}$, onde, para cada inteiro $k \geq 0$, $S_k(G)$ representa a cardinalidade de uma k -estrela máxima de G . Então*

(i) $\Delta \underline{M}(G)$ é uma partição de $|E|$;

(i) A partição conjugada de $\Delta \underline{M}(G)$ é o fecho por partições de $\Delta \underline{S}(G)$.

Demonstração.

Seja $G = (X, Y, E)$ um multigrafo bipartido e consideremos o grafo adjunto de G . Como observámos anteriormente, sendo G bipartido, $L(G)$ é um grafo unimodular. Então, pelo teorema 5.54, $\Delta \underline{\omega}(\overline{L(G)})$ é uma partição cuja conjugada é o fecho por partições de $\Delta \underline{\omega}(L(G))$.

Não é difícil verificar que $\Delta \underline{\omega}(L(G)) = \underline{S}(G)$ e $\Delta \underline{\omega}(\overline{L(G)}) = \underline{M}(G)$. ■

Voltemos a considerar os exemplos de grafos bipartidos apresentados no final do capítulo anterior.

No exemplo 4.22, vimos que o grafo G representado na figura 4.7 satisfaz

$$PM(G) = \Delta \underline{M}(G) = (3, 2, 1, 0, \dots) \in P_6,$$

$$S(G) = \Delta \underline{S}(G) = (3, 1, 2, 0, \dots) \notin P_6.$$

O teorema 5.56 explica agora a observação efectuada de que

$$(\Delta \underline{S}(G)^P)' = (S(G)^P)' = (3, 2, 1, 0, \dots)' = (3, 2, 1, 0, \dots) = PM(G) = \Delta \underline{M}(G).$$

No exemplo 4.23, vimos que o grafo bipartido G da figura 4.8 verifica

$$PM(G) = \Delta \underline{M}(G) = (2, 1, 1, 0, \dots) \in P_4,$$

$$S(G) = \Delta \underline{S}(G) = (3, 1, 0, \dots) \in P_4.$$

O teorema 5.56 afirma que $(\Delta\underline{S}(G)^P)' = (S(G)^P)' = PM(G) = \Delta\underline{M}(G)$. Atendendo a que $S(G) = \Delta\underline{S}(G) = (3, 1, 0, \dots)$ forma uma partição de 4, é claro que $\Delta\underline{S}(G)^P = S(G)^P = \Delta\underline{S}(G) = S(G) = (3, 1, 0, \dots)$ e portanto temos

$$(\Delta\underline{S}(G))' = (S(G))' = (3, 1, 0, \dots)' = (2, 1, 1, 0, \dots) = PM(G) = \Delta\underline{M}(G).$$

5.5 Matróides, famílias saturadas e pares antibloco de hipergrafos

Visto que um matróide pode ser encarado como um hipergrafo, consideramos aqui os conceitos e resultados apresentados nas secções anteriores para esta classe particular de hipergrafos.

Doravante, S é um conjunto finito, não vazio e $M = (S, \mathcal{I})$ um matróide em S , sem loops, com aplicação característica d e número cromático c .

Como referimos no exemplo 5.3, o matróide M pode ser encarado como um hipergrafo, sendo representado por H_M . É de notar que a definição de matróide torna H_M um ideal.

A dimensão do hipergrafo H_M corresponde à cardinalidade máxima de uma aresta. Então

$$r(H_M) = \max\{|X| : X \subseteq S, X \in \mathcal{I}\} = d(S),$$

onde $d(S)$ designa a dimensão do matróide M .

O número de cobertura do hipergrafo H_M representa o número mínimo de arestas que compõem uma H_M -cobertura de S . Atendendo a que H_M é um ideal, toda a H_M -cobertura de S forma uma H_M -partição de S , pelo que o número de cobertura corresponde ao número mínimo de conjuntos independentes em M cuja união disjunta é S . O número de cobertura de H_M é portanto igual ao número cromático de M .

O número de estabilidade forte do hipergrafo H_M designa a cardinalidade máxima de um subconjunto X de S estável em H_M , isto é,

$$\alpha(H_M) = \max\{|X| : X \subseteq S, |X \cap A| \leq 1, \forall A \in \mathcal{I}\}.$$

Não é difícil constatar que, para cada subconjunto X de S , temos

$$X \text{ é estável em } H_M \text{ se e só se } X \subseteq \bar{x}, \text{ para algum } x \in S.$$

Atendendo a que $\alpha(H_M)$ designa a cardinalidade máxima de um conjunto estável em H_M , deduzimos que

$$\alpha(H_M) = \max\{|X| : X \subseteq S, |X \cap A| \leq 1, \forall A \in \mathcal{I}\} = \max\{|\bar{x}| : x \in S\}.$$

A correspondência existente entre dimensão, número de cobertura, número de estabilidade forte do hipergrafo H_M e certos parâmetros do matróide M sugere que as sucessões $\underline{r}(H_M)$, $\underline{\rho}(H_M)$ e $\underline{\alpha}(H_M)$ têm uma tradução de grande simplicidade em M .

Seja k um inteiro positivo. Visto que H_M é um ideal, uma k -aresta de H_M é um subconjunto X de S que admite uma H_M -partição formada por k arestas. Tal é claramente equivalente a dizer que

$$X = F_1 \cup \dots \cup F_k,$$

onde (F_1, \dots, F_k) é uma família de conjuntos independentes em M dois a dois disjuntos. Concluimos que as k -arestas de H_M são exactamente os conjuntos independentes em $M^{(k)}$, a k -ésima potência de M .

Proposição 5.57 *Seja $M = (S; \mathcal{I})$ um matróide sem loops e H_M o hipergrafo correspondente. Para cada inteiro positivo k , d_k designa a aplicação característica de $M^{(k)}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $\underline{r}(H_M) = (d_k(S))_{k \geq 0}$;
- (ii) $\Delta \underline{r}(H_M) = d(M)$, onde $d(M)$ é a partição característica de M ;
- (iii) $\Delta \underline{\rho}(H_M) = t(M)$, onde $t(M)$ é a partição de profundidade de M .

Demonstração.

(i) Seja k um inteiro positivo. Visto que as k -arestas de H_M são exactamente os conjuntos independentes em $M^{(k)}$, temos

$$r_k(H_M) = \max\{|X| : X \subseteq S \text{ é independente em } M^{(k)}\} = d_k(S).$$

As convenções $d_0(S) = r_0(H_M) = 0$ permitem concluir o resultado.

(ii) Pela alínea anterior, é evidente que

$$\Delta \underline{r}(H_M) = (d_1(S), d_2(S) - d_1(S), \dots, d_c(S) - d_{c-1}(S), 0, 0, \dots) = d(M).$$

Pelo teorema 3.10, concluimos ainda que $\Delta \underline{r}(H_M)$ forma uma partição de $|S|$.

(iii) Pela proposição 5.31, sabemos que o hipergrafo H_M satisfaz

$$\underline{\rho}(H_M) = \Phi_{\underline{r}}(H_M).$$

Pelo teorema 1.11, tal significa que $\Delta_{\underline{\rho}}(H_M)$ e $\Delta_{\underline{r}}(H_M)^P$ são partições conjugadas. Pela alínea (ii), $\Delta_{\underline{r}}(H_M)$ é uma partição de $|S|$, pelo que

$$\Delta_{\underline{r}}(H_M)^P = \Delta_{\underline{r}}(H_M).$$

Concluimos que $\Delta_{\underline{r}}(H_M)$ e $\Delta_{\underline{\rho}}(H_M)$ são partições conjugadas. Assim, pelo teorema 3.13, temos

$$\Delta_{\underline{\rho}}(H_M) = t(M),$$

onde $t(M)$ é a partição de profundidade de M . ■

É de notar que o teorema 3.10 decorre da proposição 3.15, que estabelece a existência de uma família saturada de M . Recordemos que uma família saturada de M é uma família $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_c)$ de conjuntos independentes em M , não vazios, disjuntos dois a dois e tais que

$$B_1 \cup \dots \cup B_k$$

é uma base de $M^{(k)}$, para $k = 1, \dots, c$. É evidente que \mathcal{B} forma uma H_M -partição de S .

A proposição seguinte afirma que toda a família saturada de M é uma família de k -norma mínima em H_M , para qualquer inteiro positivo k .

Proposição 5.58 *Seja $M = (S; \mathcal{I})$ um matróide, sem loops, com número cromático c e seja H_M o hipergrafo correspondente. Seja $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_c)$ uma família saturada de M . Então, para qualquer inteiro positivo k ,*

$$|\mathcal{B}|_k = \rho_k(H_M).$$

Demonstração.

Seja $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_c)$ uma família saturada de M e seja k um inteiro positivo. Atendendo à demonstração do teorema 3.10, temos, para $1 \leq i \leq c$,

$$|B_i| = d_i(S) - d_{i-1}(S) = (\Delta_{\underline{r}}(H_M))_i.$$

Enquanto H_M -partição de S , a família de arestas \mathcal{B} satisfaz

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}|_k &= \sum_{i=1}^c \min\{|B_i|, k\} = \sum_{i=1}^c \min\{(\Delta r(H_M))_i, k\} \\ &= \sum_{j=1}^k ((\Delta r(H_M))'_j) = \sum_{j=1}^k (\Delta \rho(H_M))_j \\ &= \rho_k(H_M). \end{aligned}$$

■

Atendendo ao exposto nas secções anteriores deste capítulo, torna-se natural questionar se uma família saturada de M é uma família de arestas de H_M k -saturada, para algum inteiro positivo k .

Pelo teorema 5.33, temos, para qualquer inteiro positivo k ,

$$\rho_k(H_M) \geq \alpha_k(H_M), \quad (5.1)$$

onde $\alpha_k(H_M)$ designa a cardinalidade máxima de um conjunto k -estável no hipergrafo H_M .

Seja $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_c)$ uma família saturada de M e k um inteiro positivo. É consequência da desigualdade 5.1 e da definição que H_M admite uma família de arestas k -saturada se e só se

$$\rho_k(H_M) = |\mathcal{B}|_k = \alpha_k(H_M).$$

Nesta situação, \mathcal{B} é uma família de arestas k -saturada.

Na verdade, existem matróides que satisfazem

$$\rho_k(H_M) > \alpha_k(H_M),$$

para algum inteiro positivo k , como exemplificamos de seguida.

Exemplo 5.59 Seja (e_1, e_2, e_3, e_4) uma família linearmente independente de um espaço vectorial real V . Sejam $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, $x_3 = e_3$, $x_4 = e_4$, $x_5 = 2e_2$, $x_6 = e_1 + e_2$, $x_7 = e_3 + e_4$, $x_8 = e_2$ e $x_9 = e_1 - e_2$.

Consideremos o matróide vectorial $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ em $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e H_M o hipergrafo correspondente.

Não é difícil constatar que

$$\mathcal{B} = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}, \{8, 9\})$$

é uma família saturada de M . Então

$$d(M) = \Delta_{\underline{r}}(H_M) = (4, 3, 2, 0, \dots)$$

e temos

$$\begin{aligned}\rho_1(H_M) &= |\mathcal{B}|_1 = 3, \\ \rho_2(H_M) &= |\mathcal{B}|_2 = 6, \\ \rho_3(H_M) &= |\mathcal{B}|_3 = 8, \\ \rho_k(H_M) &= |\mathcal{B}|_4 = 9, \quad \forall k \geq 4.\end{aligned}$$

Por outro lado, também não é difícil mostrar que o conjunto \mathcal{E} dos subconjuntos de S estáveis em H_M é dado por

$$\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq S : |X| = 1\} \cup \{\{2, 5\}, \{2, 8\}, \{5, 8\}, \{2, 5, 8\}\}.$$

Concluimos que $\alpha_1(H_M) = 3 = \rho_1(H_M)$. Do mesmo modo, também temos que $\alpha_2(H_M) = 6 = \rho_2(H_M)$. No entanto, não existe nenhum subconjunto X de S 3-estável em H_M com 8 elementos. De facto,

$$X = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

é um conjunto 3-estável em H_M de cardinalidade máxima. Assim,

$$\alpha_3(H_M) = 7 < 8 = \rho_3(H_M).$$

Temos ainda que $\alpha_4(H_M) = 9$, pois toda a base do matróide M tem 4 elementos e logo S é 4-estável em H_M . Assim

$$\Delta_{\underline{\alpha}}(H_M) = (3, 6 - 3, 7 - 6, 9 - 7, 9 - 9, \dots) = (3, 3, 1, 2, 0, \dots) \notin P_9.$$

Concluimos que, enquanto hipergrafo, um matróide nem sempre admite famílias de arestas k -saturadas. Naturalmente, o teorema 5.36 permite entender porque é que a composição $\Delta_{\underline{\alpha}}(H_M)$ nem sempre é uma partição de $|S|$.

É possível que a inexistência de famílias k -saturadas em certos matróides esteja associada às propriedades da relação antibloco para este tipo de hipergrafos. De facto, o par (H_M, H_M^A) nem sempre forma um par antibloco de hipergrafos, como confirma o exemplo seguinte.

Exemplo 5.60 Seja V um espaço vectorial real e (e_1, e_2, e_3) uma base de V .
 Sejam $x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3, x_4 = e_1 + e_2, x_5 = e_2$ e $x_6 = e_3$.
 Seja o matróide vectorial $M = M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ em $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 Não é difícil constatar que o conjunto das arestas do hipergrafo H_M é

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq S : |X| = 1\} \cup \{X \subseteq S : |X| = 2\} \setminus \{\{2, 5\}, \{3, 6\}\} \\ & \cup \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}\} \\ & \cup \{\{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}. \end{aligned}$$

Consideremos o antibloco do hipergrafo $H_M, H_M^A = (S; \mathcal{I}^A)$. Visto que as arestas do antibloco são os subconjuntos X de S estáveis em H_M , temos claramente

$$\mathcal{I}^A = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq S : |X| = 1\} \cup \{\{2, 5\}, \{3, 6\}\}.$$

Se (H_M, H_M^A) for um par antibloco de hipergrafos, temos

$$(H_M^A)^A = H_M,$$

o que significa que as arestas de H_M correspondem aos subconjuntos de S estáveis em H_M^A . Ora, $X = \{1, 4, 5\}$ é estável no hipergrafo H_M^A , sem no entanto pertencer ao conjunto de arestas de H_M .

Contudo, é possível exibir uma classe particular de matróides, para os quais o par (H_M, H_M^A) constitui sempre um par antibloco de hipergrafos e toda a família saturada de M é k -saturada, para qualquer inteiro positivo k .

Esta corresponde à classe dos matróides vectoriais apresentados no exemplo 3.19, isto é, a classe dos matróides $M = M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})$ em $S = \{1, \dots, m\}$, onde V é um espaço vectorial unitário, (e_1, \dots, e_n) uma base de V e $\gamma \in \Gamma_{m,n}$.

Lema 5.61 *Seja V um espaço vectorial unitário e (e_1, \dots, e_n) uma base de V .
 Seja $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ e M_γ a partição de multiplicidades de γ .
 Seja $M = M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})$, matróide vectorial em $S = \{1, \dots, m\}$.
 Seja H_M o hipergrafo correspondente a M . Para cada inteiro positivo k ,*

$$\alpha_k(H_M) = \max\{|\overline{x_1} \cup \dots \cup \overline{x_t}| : \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq S, t \leq k \text{ e } \gamma(x_i) \neq \gamma(x_j), i \neq j\}.$$

Demonstração.

Nas condições do enunciado, consideremos $H_M = (S; \mathcal{I})$ o hipergrafo correspondente ao matróide M .

Seja k um inteiro positivo. $\alpha_k(H_M)$ representa a cardinalidade máxima de um subconjunto X de S k -estável em H_M , ou seja,

$$\alpha_k(H_M) = \max\{|X| : |X \cap I| \leq k, \forall I \in \mathcal{I}\}.$$

Seja $t \leq k$ o maior inteiro positivo tal que existe $\{x_1, \dots, x_t\} \subseteq S$ satisfazendo

$$\gamma(x_i) \neq \gamma(x_j), \forall i, j \in \{1, \dots, t\}, i \neq j.$$

Seja $X = \overline{x_1} \cup \dots \cup \overline{x_t}$.

Para cada $1 \leq i \leq t$, $\overline{x_i} = \gamma^{-1}(\gamma(x_i))$. Consequentemente,

$$\overline{x_i} \cap \overline{x_j} = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \dots, t\}, i \neq j.$$

Seja $A \in \mathcal{I}$. É claro que $|\overline{x_i} \cap A| \leq 1$, para cada $1 \leq i \leq t$. Assim

$$\begin{aligned} |X \cap A| &= |(\overline{x_1} \cup \dots \cup \overline{x_t}) \cap A| = |(\overline{x_1} \cap A) \cup \dots \cup (\overline{x_t} \cap A)| \\ &= \sum_{i=1}^t |\overline{x_i} \cap A| \leq t \leq k. \end{aligned}$$

Concluimos que X é k -estável em H_M . Por outro lado, se $Y \subseteq X$, é claro que

$$|Y \cap I| \leq |X \cap I| \leq k, \forall I \in \mathcal{I}$$

e portanto Y também é k -estável em H_M .

Reciprocamente, consideremos $X \subseteq S$ k -estável em H_M . Definimos

$$t = \max\{|X \cap I| : I \in \mathcal{I}\}.$$

Visto que X é k -estável em H_M , é claro que $t \leq k$.

Por definição de t , podemos considerar $A \in \mathcal{I}$ tal que $X \cap A = \{x_1, \dots, x_t\}$, onde x_1, \dots, x_t são t elementos de S . Consideremos $i, j \in \{1, \dots, t\}$ tais que $i \neq j$. Como $\{x_1, \dots, x_t\} \subseteq A \in \mathcal{I}$, então

$$\gamma(x_i) \neq \gamma(x_j).$$

De facto, se $\gamma(x_i) = \gamma(x_j)$, então $x_i \in \overline{x_j}$ e logo $\{x_i, x_j\}$ é um conjunto dependente contido em $A \in \mathcal{I}$, o que constitui uma contradição.

Vejamos agora que $X \subseteq \overline{x_1} \cup \dots \cup \overline{x_t}$. Seja $x \in X$. Se $x \notin \overline{x_1} \cup \dots \cup \overline{x_t}$ então $\gamma(x) \neq \gamma(x_i)$, para todo o $i \in \{1, \dots, t\}$. Então, o conjunto $\{x_1, \dots, x_t, x\} \subseteq X$ é independente em M . Mas então,

$$|X \cap \{x_1, \dots, x_t, x\}| = t + 1$$

o que contradiz a maximalidade de t .

Concluimos que, para cada inteiro positivo k ,

$$\alpha_k(H_M) = \max\{|\overline{x_1} \cup \dots \cup \overline{x_t}| : \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq S, t \leq k \text{ e } \gamma(x_i) \neq \gamma(x_j), i \neq j\}.$$

■

Teorema 5.62 *Seja V um espaço vectorial unitário e (e_1, \dots, e_n) uma base de V . Seja $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ e M_γ a partição de multiplicidades de γ . Seja $M = M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})$ e H_M o hipergrafo correspondente. Então, as afirmações seguintes são verdadeiras:*

$$(i) \quad \Delta_{\underline{r}}(H_M) = d(M) = M'_\gamma;$$

$$(ii) \quad \Delta_{\underline{\rho}}(H_M) = t(M) = M_\gamma;$$

$$(iii) \quad \underline{\rho}(H_M) = \underline{\alpha}(H_M).$$

Demonstração.

As duas primeiras alíneas são consequências directas da proposição 5.57 e dos resultados demonstrados nos exemplos 3.19 e 3.35.

(iii) Suponhamos que $M_\gamma = (|\gamma^{-1}(i_1)|, \dots, |\gamma^{-1}(i_s)|)$, onde, para cada $1 \leq j \leq s$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$ e $|\gamma^{-1}(i_s)| \neq 0$. É claro que $\gamma(S) = \{i_1, \dots, i_s\}$.

Seja k um inteiro positivo. Pelo lema 5.61, temos

$$\begin{aligned} \alpha_k(H_M) &= \max\{|\overline{x_1} \cup \dots \cup \overline{x_t}| : \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq S, t \leq k \text{ e } \gamma(x_i) \neq \gamma(x_j)\} \\ &= \max\{|\overline{x_1}| + \dots + |\overline{x_t}| : \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq S, t \leq k \text{ e } \gamma(x_i) \neq \gamma(x_j)\} \\ &= \max\left\{\sum_{i=1}^t |\gamma^{-1}(\gamma(x_i))| : \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq S, t \leq k \text{ e } \gamma(x_i) \neq \gamma(x_j)\right\}. \end{aligned}$$

Então, a definição de partição de multiplicidades permite afirmar que

$$\alpha_k(H_M) = |\gamma^{-1}(i_1)| + \dots + |\gamma^{-1}(i_k)| = \sum_{j=1}^k (M_\gamma)_j, \quad \text{se } k \leq s$$

e também que

$$\alpha_k(H_M) = |\gamma^{-1}(i_1)| + \dots + |\gamma^{-1}(i_s)| = m = \sum_{j=1}^k (M_\gamma)_j, \quad \text{se } k > s,$$

onde $(M_\gamma)_j = 0$, se $j \geq s$. Então, pela alínea (ii), temos, para cada $k \geq 1$,

$$\alpha_k(H_M) = \sum_{j=1}^k (M_\gamma)_j = \rho_k(H_M).$$

■

Teorema 5.63 *Seja V um espaço vectorial unitário e seja (e_1, \dots, e_n) uma base de V . Seja $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ e M_γ a partição de multiplicidades de γ . Seja $M = M(e_{\gamma(1)}, \dots, e_{\gamma(m)})$ e H_M o hipergrafo correspondente. Então*

(H_M, H_M^A) forma um par antibloco de hipergrafos.

Demonstração.

Nas condições do enunciado, consideremos o hipergrafo $H_M = (S; \mathcal{I})$ e o seu antibloco, $H_M^A = (S; \mathcal{I}^A)$, onde $S = \{1, \dots, m\}$.

Pela proposição 5.12, sabemos que

$$H_M \subseteq (H_M^A)^A.$$

Vejamos que a inclusão contrária ainda é verdadeira.

Consideremos uma aresta do hipergrafo $(H_M^A)^A$, isto é, $Y \subseteq S$ estável em H_M^A . Atendendo ao lema 5.61, sabemos que

$$\mathcal{I}^A = \{X \subseteq S : X \subseteq \bar{x}, \text{ para algum } x \in S\},$$

pelo que Y é tal que

$$|Y \cap \bar{x}| \leq 1, \forall x \in S.$$

Suponhamos que $Y = \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq S$ é constituído por t elementos.

Se existirem $i, j \in \{1, \dots, t\}$, $i \neq j$, tais que $\gamma(x_i) = \gamma(x_j)$, então $x_i \in \bar{x}_j$ e logo $\{x_i, x_j\} \subseteq Y \cap \bar{x}_j$. Então,

$$|Y \cap \bar{x}_j| \geq 2,$$

o que contradiz o facto de Y ser estável em H_M^A . Concluimos que

$$\gamma(x_i) \neq \gamma(x_j), \forall i, j \in \{1, \dots, t\}, i \neq j$$

e portanto $Y = \{x_1, \dots, x_t\}$ é independente em M .

Atendendo a que todo conjunto estável em H_M^A constitui uma aresta de H_M , concluimos que

$$H_M = (H_M^A)^A,$$

o que é equivalente a dizer que (H_M, H_M^A) forma um par antibloco de hipergrafos. ■

Bibliografia

- [1] M. AIGNER, *Combinatorial Theory*, Springer, New York, 1979.
- [2] M. ALBERTSON, A new paradigm for duality questions, não publicado.
- [3] C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
- [4] C. BERGE, *Hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [5] C. BERGE, Perfect graphs, *Studies in Graph Theory I* (D. R. Fulkerson, ed), MAA Studies in Mathematics, pp. 1-22, 1975.
- [6] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, AMS Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [7] R. BRUALDI, H. RYSER, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, 1991.
- [8] R. CORDOVIL, J. A. DIAS DA SILVA, A. FONSECA, On the notion of a transversal of a sum of matroids, *Portugaliae Mathematica* **45** (1988) 317-325.
- [9] J. A. DIAS DA SILVA, On the μ -colorings of a matroid, *Linear and Multilinear Algebra* **27** (1990) 25-32.
- [10] J. A. DIAS DA SILVA, A. FONSECA, The r-depth of a matroid, *Discrete Mathematics* **141** (1995) 85-93.
- [11] J. A. DIAS DA SILVA, Flags and equality of tensors, *Linear Algebra and its Applications* **232** (1996) 55-75.
- [12] J. A. DIAS DA SILVA, New conditions for equality of decomposable symmetrized tensors, *Linear Algebra and its Applications* **245** (1996) 353-372.
- [13] R. P. DILWORTH, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Mathematics* **51** (1950) 161-166.

- [14] R. P. DILWORTH, Some combinatorial problems on partially ordered sets, *Combinatorial Analysis*, Proc. Symp. Appl. Math., American Mathematical Society, Providence, 1960.
- [15] J. FOLKMAN, D. R. FULKERSON, Edge colorings in bipartite graphs, *Combinatorial Mathematics and Their Applications*, (R. C. Bose e T. Dowling, eds), University of North Carolina Press, Chapel Hill, pp. 561-577, 1969.
- [16] C. GREENE, D. KLEITMAN, The structure of Sperner k -families, *Journal of Combinatorial Theory* **20** (1976) 41-68.
- [17] C. GREENE, Some partitions associated with a partially ordered set, *Journal of Combinatorial Theory* **20** (1976) 69-79.
- [18] A. J. HOFFMAN, D. E. SCHWARTZ, On partitions of a partially ordered set, *Journal of Combinatorial Theory* **23** (1977) 3-13.
- [19] L. LOVÁSZ, M. D. PLUMMER, *Matching Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [20] L. LOVÁSZ, A characterization of perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory* **13** (1972) 95-98.
- [21] A. W. MARSHALL, I. OLKIN, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1979.
- [22] R. MERRIS, *Multilinear Algebra*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997.
- [23] L. MIRSKY, A dual of Dilworth's decomposition theorem, *The American Mathematical Monthly* **78** (1971) 876-877.
- [24] C. ST. J. NASH-WILLIAMS, An application of matroids to graph theory, *Theory of Graphs International Symposium*, Dunod, Paris, 1966.
- [25] M. SAKS, Some sequences associated with combinatorial structures, *Discrete Mathematics* **59** (1986) 135-166.
- [26] M. M. TORRES, *A dimensão ortogonal dos conjuntos orbitais*, Tese de Doutoramento, Lisboa, 2005.
- [27] D. J. WELSH, *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.
- [28] D. DE WERRA, Investigations on an edge coloring problem, *Discrete Mathematics* **1** (1971) 167-179.

- [29] D. B. WEST, Parameters of partial orders and graphs: packing, covering and representation, *Graphs and Order* (I. Rival, ed), Reidel, Boston, pp. 267-350, 1985.
- [30] H. WHITNEY, On the abstract properties of linear dependence, *American Journal of Mathematics* **57** (1935) 509-533.
- [31] D. R. WOODALL, Menger and König systems, *Theory and Applications of Graphs, Proceedings Michigan* (Y. Alari e D. R. Lick, eds), Springer Lecture Notes in Mathematics **642** (1978) 620-635.