Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

O Carácter de Gelfand-Graev e Generalizações

Pedro Alexandre Correia de Matos

Trabalho orientado pelo Professor Doutor Carlos Alberto Martins André

Dissertação

Mestrado em Matemática

2015

Resumo

O principal objectivo desta dissertação é o de apresentar a construção de uma família de caracteres do grupo $GL(n, q)$, que generalize de algum modo a construção do seu carácter de Gelfand-Graev. A nossa construção é essencialmente uma adaptação da construção proposta por N. Kawanaka no âmbito dos grupos algébricos redutivos conexos. Passando ao fecho algébrico K, os nossos argumentos baseiam-se sobretudo no uso de informação respeitante ao modo como $GL(n, K)$ actua na sua álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, K)$, vendo $GL(n, q)$ como o conjunto dos pontos fixos em $GL(n, K)$ por um certo morfismo. O tratamento já conhecido destas questões costuma impor fortes restrições sobre a característica do corpo base. No entanto, o nosso trabalho mostra como podemos "aliviar"esta restrição quando trabalhamos no grupo $GL(n, K)$. O presente trabalho é de carácter expositório, embora algumas observações permitam ligar o nosso material a outros estudos recentes, em particular no âmbito da teoria de supercaracteres do grupo unitriangular finito.

Palavras-chave: representação, carácter, álgebra de Lie, grupo algébrico linear.

Abstract

The main goal of this master thesis is that of constructing a family of characters from the group $GL(n,q)$, such that this construction generalizes, in a certain way, the construction of the more familiar Gelfand-Graev character. Our treatment amounts to an adaptation of the original construction due to N. Kawanaka for connected reductive linear algebraic groups. By taking the algebraic closure of our finite base field, we look at the action of the algebraic group $GL(n,K)$ on its Lie algebra $\mathfrak{gl}(n,K)$, where $GL(n,q)$ is the set of fixed points in $GL(n,K)$ by a certain morphism. A forceful restriction on the characteristic of the base field arises in the general treatment of these questions, but our work shows us that this restriction can be further improved when working with $GL(n,K)$. We should refer that our work is mainly expository, but the way in which we treat this material can somehow be linked to further research in other fields, such as in supercharacter theory of the finite unitriangular group.

Key-words: representation, character, Lie algebra, linear algebraic group.

Dedicado ao Joaquim

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a disponibilidade do Professor Carlos André em orientar este trabalho, bem como a sua preciosa contribuição na clarificação de alguns aspectos. Quero também agradecer aos meus amigos e à minha família. Em particular, agradeço os conselhos dos meus amigos Jocelyn Lochon, João Dias e Simão Correia, que muito me ajudaram na elaboração deste trabalho. Também agradeço o apoio da minha família, importantíssimo nos momentos mais difíceis. Pois o Homem não vive apenas do sucesso.

Conteúdo

Introdução

A teoria da representação de um grupo finito G para um corpo K algebricamente fechado com característica nula (doravante o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$) é suficientemente sólida, no sentido em que esta goza de um número de propriedades desejáveis: todos os $KG-$módulos são semisimples, e o estudo das representações de dimensão finita é equivalente ao estudo dos seus caracteres. No entanto, a descrição explícita dos caracteres de alguns grupos lineares finitos é um problema genuinamente difícil. Contudo, alguns avanços têm sido feitos, em particular no que diz respeito ao estudo dos caracteres do grupo linear completo finito $GL(n, q)$ e do grupo linear especial $SL(n, q)$. Começamos por referir dois trabalhos que apontam nesta direcção:

- Gelfand e Graev [5] construíram uma representação de $SL(n, q)$ que é livre de multiplicidades;
- J. A. Green [2] forneceu uma descrição da *série discreta* de $GL(n, q)$ (esta série é composta pelos caracteres que não surgem como combinação linear de caracteres induzidos de subgrupos parabólicos).

Damos especial atenção ao trabalho de Gelfand e Graev, que assenta na estratégia de construir representações de um dado grupo que alberguem o maior número possível de subrepresentações irredutíveis que surjam no máximo com multiplicidade igual a 1. Na introdução de [5], é possível verificar que as investigações feitas em torno deste tema para um grupo de Lie complexo simples dão especial ênfase à indução de certos caracteres do seu subgrupo nilpotente maximal. No seu trabalho, Gelfand e Graev adaptam esta ideia para o grupo $SL(n, q)$, induzindo certos caracteres lineares do subgrupo unitriangular $U(n, q)$. A indução de qualquer um destes caracteres está bem definida, dando origem um carácter de $SL(n, q)$ conhecido como o *carácter de Gelfand-Graev* (chamamos a qualquer representação que o origina uma *representação de Gelfand-Graev*). Deligne e Luztig [11] enquadraram o estudo das representações de Gelfand-Graev no contexto mais abrangente dos grupos algébricos redutivos sobre um corpo finito. Em particular, Green utilizou algumas propriedades do carácter de Gelfand-Graev estudadas por Deligne e Luztig para provar propriedades de certos caracteres indispensáveis à descrição da série discreta de $GL(n, q)$ (ver a introdução de [2], e também as secções 6 e 8 do mesmo artigo). Este exemplo sugere a importância do estudo do carácter de Gelfand-Graev e das suas propriedades.

Uma importante generalização da construção do carácter de Gelfand-Graev para grupos redutivos sobre um corpo finito deve-se a Kawanaka [12]. Kawanaka fornece uma construção que associa a cada classe unipotente uma representação do grupo, de tal maneira que à classe unipotente regular encontra-se associada uma representação de Gelfand-Graev. As representações assim obtidas chamam-se por isso *representações de Gelfand-Graev generalizadas* (ou RGGG abreviadamente), e os respectivos caracteres chamam-se *caracteres de Gelfand-Graev generalizados* (ou CGGG abreviadamente). Em [3] secção 2.2, pode ler-se um resumo desta construção.

A presente dissertação possuí dois objectivos:

- Apresentarmos a construção do carácter de Gelfand-Graev para o grupo $GL(n, q)$, e provarmos que toda a representação de Gelfand-Graev deste grupo é livre de multiplicidades.

- Apresentarmos a construção de uma família de caracteres de $GL(n, q)$, chamados *caracteres de Gelfand-Graev generalizados*, ou CGGG abreviadamente, e que incluí o carácter de Gelfand-Graev. Esta construção poderá ser vista como uma generalização da construção do carácter de Gelfand-Graev. Pretendemos ainda relacionar alguns passos da nossa construção com ideias que estão ligadas ao trabalho original de Kawanaka ([12] e [3]).

Assim, a nossa discussão divide-se em duas partes:

Parte I Uma primeira parte exclusivamente dedicada ao carácter de Gelfand-Graev do grupo $GL(n, q)$, de natureza expositória.

Parte II Aqui discutem-se os aspectos essenciais na construção dos CGGG no caso de $GL(n, q)$, complementando a discussão com paralelos ao caso geral (que infelizmente não iremos discutir em detalhe).

Capítulo 1

Preliminares do grupo linear completo

Seja $n \in \mathbb{N}$ e K um corpo. começamos por sistematizar os resultados sobre a estrutura do grupo linear completo que são importantes do ponto de vista da nossa discussão. Omitimos a prova de alguns resultados. Em particular, introduz-se a noção de um par$-(B, N)$, que permitirá isolar a família de subgrupos parabólicos de $GL(n, K)$, à qual pertence em particular o subgrupo das matrizes triangulares superiores B. Analisamos a decomposição de Levi destes subgrupos, que de algum modo generaliza o produto semidirecto $B = U \rtimes T$ onde U é o subgrupo das matrizes unitriangulares superiores e T é o subgrupo das matrizes diagonais. Esta decomposição, no caso de B, desempenhará um papel importante na construção do carácter de Gelfand-Graev.

1.1 O par$-(B, N)$ do grupo linear completo

Definição 1.1.1. *Seja G um grupo, $B, N \leq G$ subgrupos. Dizemos que B e N formam um par-(B, N) de G se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $G = < B, N >$.

(ii) $T := B \cap N$ *é um subgrupo normal de* N.

(iii) $W := N/T$ *é gerado por um conjunto de elementos* s_i, $i \in I$, *tal que* $s_i^2 = 1$.

(iv) Se $s_i = \pi(n_i)$ *para algum* $n_i \in N$, *onde* $\pi : N \to W$ *é a projecção canónica, então* $n_i B n_i \neq B$.

(v) Para cada $n \in N$ *e para cada* n_i *nas condições de (iv) tem-se que* $n_i B n \subseteq B n_i n B \cup B n B$.

A existência de um par$-(B,N)$ impõe fortes restrições sobre a estrutura do grupo. Em particular, é possível obter o seguinte resultado [15].

Proposição 1.1.2. *Seja G um grupo. Se G admite um par$-(B,N)$, então*

$$G = BNB$$

De facto, a definição anterior não é mais do que a generalização de uma configuração particular de subgrupos de $GL(n,K)$, que existe quando $n \geq 2$. O seguinte lema identifica esta configuração [18]:

Lema 1.1.3. *Seja $n \geq 2$. Seja B o subgrupo das matrizes triangulares superiores invertíveis, e seja N o subgrupo das matrizes monomiais (ou matrizes de permutação generalizadas). Então:*

1. *$T := B \cap N$ é o subgrupo das matrizes diagonais invertíveis.*
2. *N é o normalizador de T em $GL(n,K)$.*
3. *$N/T \simeq S_n$, onde S_n é o grupo simétrico sobre n elementos.*

É possível concluír que, para $n \geq 2$, os subgrupos B e N de $GL(n,K)$ formam um par$-(B,N)$, onde em particular o elemento s_i corresponde à transposição $(i, i+1) \in S_n$ [18]. Da Proposição 1.1.2, resulta que $GL(n,q)$ se decompõe em classes laterais duplas$-(B,B)$ com representantes monomiais.

1.2 Subgrupos Parabólicos

Ao longo deste capítulo, reservamos as letras B e N para denotar os subgrupos de $GL(n,K)$ descritos na secção anterior.

A existência de um par$-(B,N)$ impõe restrições sobre os subgrupos que contêm B. Em particular, temos o seguinte resultado (ver [15] ou [18]):

Proposição 1.2.1. *Qualquer subgrupo de $GL(n,K)$ que contenha B é necessariamente da forma*

$$P_I := < B, s_i \mid i \in I >$$

para algum $I \subseteq \{1, \cdots, n-1\}$, onde s_i denota a matriz de permutação que troca a $i-$ésima coluna com a $(i+1)-$ésima coluna de uma matriz e fixa as restantes, quando multiplicada à esquerda. Em particular, existem 2^{n-1} subgrupos desta forma.

Um subgrupo de $GL(n, K)$ que contenha B diz-se um *subgrupo parabólico*. Assim, os subgrupos parabólicos de $GL(n, K)$ são descritos pela Proposição 1.2.1. Em particular, $B = P_\emptyset$ e $GL(n, q) = P_{\{1,\cdots,n-1\}}$. Intuitivamente, a Proposição 1.2.1 diz-nos que as matrizes de um subgrupo parabólico diferente de $GL(n, K)$ obtêm-se por "desmantelação"de matrizes em forma triangular superior. Uma vez que estes subgrupos contêm B, será de esperar que as matrizes resultantes tenham uma forma triangular superior "por blocos". A seguinte observação mostra como é que matrizes deste tipo surgem num outro contexto.

Observação 1.2.2. *Consideremos o espaço vectorial K^n de dimensão n sobre K, e tomemos a acção usual de $GL(n, K)$ sobre este espaço (relativamente à base canónica $\{e_i\}$, $e_i := (0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, \cdots, 0)$). Em particular, $GL(n, K)$ também actua sobre as cadeias de subespaços de K^n:*

$$0 = V_0 < V_1 \cdots < V_r = K^n \tag{1.1}$$

Fixemos uma cadeia de subespaços como em (1.1), e suponhamos que esta é adaptada pela base canónica, i.e $V_i = < e_1, \cdots, e_i >$. Defina-se ainda:

$$n_i := dim\, V_i$$

$$\lambda_i := n_i - n_{i-1},\ i \in \{1, \cdots, r\}$$

Notemos que $\lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \vDash n$ é uma composição de n. Então, não é difícil concluír que o estabilizador (em $GL(n, K)$) de (1.1) nestas condições é necessariamente da forma:

$$P_\lambda := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix} : A_i \in GL(\lambda_i, K) \right\}$$

Em particular, existem 2^{n-1} subgrupos desta forma.

Proposição 1.2.3. *Seja $\lambda \vDash n$. Então existe um único $I \subseteq \{1, \cdots, n-1\}$ tal que $P_\lambda = P_I$.*

Os subgrupos parabólicos de $GL(n, K)$ surgem assim como estabilizadores das cadeias de subespaços de K^n, e encontram-se naturalmente parametrizados pelas composições de n.

Recordemos que B admite uma decomposição $B = U \rtimes T$, onde U é o subgrupo das matrizes triangulares superiores e T é o subgrupo das matrizes diagonais invertíveis [18]. Vimos que B também é um subgrupo parabólico, o que sugere que os subgrupos parabólicos admitem uma decomposição análoga à de B.

Proposição 1.2.4 (**Decomposição de Levi**)**.** *Seja* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \vDash n$ *e* P_λ *um subgrupo parabólico de* $GL(n,q)$*. Então* $P_\lambda = U_\lambda \rtimes L_\lambda$ *(dita decomposição de Levi de* P_λ*), onde*

$$U_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} I_{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & I_{\lambda_r} \end{pmatrix} \right\}$$

$$L_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix} : A_i \in GL(\lambda_i, K) \right\}$$

onde I_{λ_i} *é a matriz identidade de ordem* λ_i*.*

Se P_λ for um subgrupo parabólico com decomposição de Levi $P_\lambda = U_\lambda \rtimes L_\lambda$, então U_λ diz-se o *radical unipotente* de P_λ. Temos dois casos extremos: se $\lambda = (1, \cdots, 1)$ então $P_\lambda = B$, $U_\lambda = U$ e $L_\lambda = T$, recuperando assim a decomposição já conhecida para B; se $\lambda = (n)$, então $P_\lambda = GL(n,K)$ e $U_{(n)}$ é o subgrupo trivial.

Notemos que U_λ é um subgrupo de U para cada $\lambda \vDash n$. Veremos mais adiante que os CGGG de $GL(n,q)$ resultam da indução de certos caracteres destes subgrupos.

Capítulo 2

Carácter de Gelfand-Graev do grupo $GL(n, q)$

Iremos discutir efectivamente a construção do carácter de Gelfand-Graev do grupo $GL(n, q)$. Veremos em particular como o produto semidirecto $B = U \rtimes T$ permite escolher a família dos caracteres lineares candidatos à indução, ditos caracteres *não degenerados*. O que sugere que os subgrupos parabólicos poderão estar relacionados com a construção das CGGG. Provamos ainda que as representações de Gelfand-Graev são livres de multiplicidades. A nossa prova é uma adaptação do argumento de Steinberg [19] para o caso geral, que também se encontra discutido na secção 8.1 do capítulo 8 de [6]. Ao longo deste capítulo, G denota o grupo $GL(n, q)$, onde q é potência de um primo. As letras B, N, U e T designam os subgrupos do respectivo par$-(B, N)$ de G, como descritos no Lema 1.1.3 e na secção 1.2. Além disso, sempre que H for um grupo, $\mathrm{Lin}(H)$ é o conjunto dos caracteres lineares de H, e $\mathrm{Irr}(H)$ é o conjunto dos caracteres irredutíveis de H.

2.1 Os caracteres lineares de U

Como indicado na introdução, a construção do carácter de Gelfand-Graev assenta na indução a G de um carácter linear de U (veremos futuramente que esta indução está bem definida para um certo subconjunto de $\mathrm{Lin}(U)$). Assim, convém primeiro entender a natureza dos caracteres lineares de U. Começamos por observar que é sempre possível reduzir o estudo dos caracteres lineares de um grupo H ao estudo dos caracteres irredutíveis de uma versão "abelianizada" deste mesmo:

Observação 2.1.1. *Se H for um grupo e $\sigma : H \to \mathbb{C}^{\times}$ um carácter linear, então sabemos que $[H, H] \subseteq nuc(\sigma)$.*

Observação 2.1.2. *Sempre que H for um grupo e $\sigma \in Lin(H)$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} : H/[H,H] &\to \mathbb{C}^{\times} \\ gH &\mapsto \sigma(g) \end{aligned}$$

está bem definida, e $\overline{\sigma} \in Irr(H/[H,H])$.

Por outro lado, temos o seguinte resultado [4]:

Lema 2.1.3. *Seja H um grupo e $K \trianglelefteq H$. Seja $\chi \in Irr(H/K)$. A aplicação*

$$\begin{aligned} \chi^* : G &\to \mathbb{C}^{\times} \\ g &\mapsto \chi(gK) \end{aligned}$$

é um carácter irredutível de H.

Como $H/[H,H]$ é abeliano e todo o carácter irredutível de um grupo abeliano é linear [4], a observação 3.2 juntamente com o lema anterior permitem concluír que:

Proposição 2.1.4. *Seja H um grupo. A aplicação*

$$\begin{aligned} LinH &\to Irr(H/[H,H]) \\ \sigma &\mapsto \overline{\sigma} \end{aligned}$$

é uma bijecção, com inversa dada por

$$\begin{aligned} Irr(H/[H,H]) &\to Lin(H) \\ \chi &\mapsto \chi^* \end{aligned}$$

onde χ^* é dada como no lema 2.3.

A proposição anterior motiva-nos então a descrever explícitamente o grupo $U/[U,U]$. O seguinte lema não é difícil de provar:

Lema 2.1.5. *Sejam $u = (u_{ij}), v = (v_{i,j}) \in U$. Então*

$$(uv)_{i,i+1} = u_{i,i+1} + v_{i,i+1}$$

$$(u^{-1})_{i,i+1} = -u_{i,i+1}$$

para cada $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

A seguinte definição tem apenas como objectivo simplificar a linguagem:

Definição 2.1.6. *Seja u uma matriz de ordem n. Dizemos que as entradas $u_{i,i+1}$ com $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ constituem a superdiagonal de u. Se todos os elementos da superdiagonal forem nulos, dizemos que a superdiagonal é nula.*

Do lema anterior resulta então que, se $u, v \in U$, o seu comutador $[u, v] = uvu^{-1}v^{-1}$ admite superdiagonal nula. Assim, $[U, U]$ é gerado pelas matrizes unitriangulares superiores com superdiagonal nula. Este facto, juntamente com o Lema 2.1.5, permitem concluír que:

Proposição 2.1.7. *A aplicação*

$$\begin{aligned} U/[U,U] &\to \underbrace{\mathbb{F}_q^+ \times \cdots \times \mathbb{F}_q^+}_{n-1} \\ u_{ij}[U,U] &\mapsto (u_{1,2}, \cdots, u_{n-1,n}) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Se $k \in \mathbb{N}$, denotamos $A_k := \underbrace{\mathbb{F}_q^+ \times \cdots \times \mathbb{F}_q^+}_{k}$ para simplificar a notação. Os caracteres irredutíveis de A_k estão em bijecção com as suas classes de conjugação, e portanto com os seus elementos uma vez que A_k é abeliano. No nosso caso será útil descrever esta bijecção. Para isso fixemos θ um carácter não trivial de $\mathbb{F}_q^+$. Começamos por recordar como se descrevem os caracteres irredutíveis de $\mathbb{F}_q^+$

Lema 2.1.8. *Para cada $\alpha \in \mathbb{F}_q$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha\theta : \mathbb{F}_q^+ &\to \mathbb{C}^\times \\ k &\mapsto \theta(\alpha k) \end{aligned}$$

é um carácter irredutível de $\mathbb{F}_q^+$. Além disso, tem-se que

$$Irr(\mathbb{F}_q^+) = \{\ \alpha\theta \mid \alpha \in \mathbb{F}_q\ \}$$

Lema 2.1.9. *Sejam* $\theta_1, \cdots, \theta_k \in Irr(\mathbb{F}_q^+)$*. Então a aplicação:*

$$\begin{aligned}(\theta_1, \cdots, \theta_k) : A_k &\to \mathbb{C}^\times \\ (\beta_1, \cdots, \beta_k) &\mapsto \prod_{i=1}^{k} \theta_i(\beta_i)\end{aligned}$$

é um carácter irredutível de A_k*.*

Atendendo ao Lema 2.1.8, obtém-se facilmente a descrição dos caracteres lineares de A_k em termos do carácter θ:

Proposição 2.1.10. *Os caracteres irredutíveis de* A_k *são descritos da seguinte forma*

$$Irr(A_k) = \{ \ (\alpha_1\theta, \cdots, \alpha_k\theta) \mid (\ \alpha_1, \cdots, \alpha_k \ ) \in A_k \ \}$$

A seguinte proposição permite então especificar a bijecção pretendida:

Proposição 2.1.11. *Cada* $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in A_{n-1}$ *determina unívocamente uma aplicação:*

$$\begin{aligned}\chi_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})} : & U \to \mathbb{C}^\times \\ & u \mapsto \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_i\theta)(u_{i,i+1}) \\ & u \mapsto \theta\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_{i,i+1}\right)\end{aligned}$$

Tem-se que $\chi_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})} \in Irr(A_{n-1})$*.*

Assim, os caracteres de Lin(U) estão "parametrizados"por $(n-1)$-tuplos de elementos em $\mathbb{F}_q$:

$$\text{Lin}(U) = \{ \ \chi_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})} \mid (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in A_{n-1}\} \tag{2.1}$$

2.2 Acção de T sobre Lin(U)

Nesta secção, veremos que existe uma acção natural de T sobre Lin(U), cuja acção explícita conseguiremos calcular uma vez que temos uma descrição de Lin(U). Também veremos que existe uma $T-$órbita em Lin(U) sobre a qual a indução a G está bem definida. Este é o ponto crucial na construção do carácter de Gelfand-Graev.

Observação 2.2.1. *Sabemos que T normaliza U. Portanto, para cada $t \in T$ e $\chi \in Lin(U)$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \chi^t : U &\to \mathbb{C}^\times \\ u &\mapsto \chi(tut^{-1}) \end{aligned}$$

está bem definida e é um carácter linear de U. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} T \times Lin(U) &\to Lin(U) \\ (t, \chi) &\mapsto \chi^t \end{aligned}$$

define uma acção de T sobre $Lin(U)$.

Atendendo a (2.1) e à acção anteriormente definida, basta sabermos calcular a superdiagonal de um elemento em U da forma tut^{-1} com $t \in T$, para concluír como é que T actua explícitamente sobre os caracteres de Lin(U). O seguinte lema diz-nos como calcular tal superdiagonal:

Lema 2.2.2. *Sejam $u = (u_{ij}) \in U$ e $t = diag(t_1, \cdots, t_n) \in T$. Então*

$$(tut^{-1})_{i,i+1} = t_i u_{i,i+1} (t_{i+1})^{-1}$$

com $i \in \{1, \cdots, n-1\}$

Concluímos assim que a acção de T sobre Lin(U) é descrita pela seguinte

Proposição 2.2.3. *Sejam $t = (t_1, \cdots, t_n) \in T$ e $\chi_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})} \in Lin(U)$. Então:*

$$\chi^t_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})} = \chi_{(t_1 \alpha_1 (t_2)^{-1}, \cdots, t_{n-1} \alpha_n (t_n)^{-1})}$$

Temos de facto que a acção anterior é transitiva sobre os caracteres de $\mathrm{Lin}(U)$ da forma $\chi_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})} \in \mathrm{Lin}(U)$ com $\alpha_i \neq 0$ para cada $i \in \{1,\cdots,n-1\}$.

Lema 2.2.4. *Sejam* $(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$, $(\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}) \in A_{n-1}$ *com* $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ *para cada* $i \in \{1,\cdots,n-1\}$. *Então existem* $t_1,\cdots,t_n \in \mathbb{F}_q$ *invertíveis tal que*

$$(\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}) = (t_1\alpha_1(t_2)^{-1},\cdots,t_{n-1}\alpha_n(t_n)^{-1})$$

Demonstração. Como $\alpha_1 \neq 0$ é invertível, podemos escrever

$$\beta_1 = \beta_1\alpha_1(\alpha_1)^{-1}$$

Analogamente, para β_2 escrevemos

$$\beta_2 = \alpha_1\alpha_2\beta_2(\alpha_1\alpha_2)^{-1}$$

Definimos então,

$$\begin{aligned} t_1 &:= \beta_1 \\ t_2 &:= \alpha_1 \\ t_3 &:= \alpha_1\alpha_2(\beta_1)^{-1} \end{aligned}$$

Não é difícil de concluír que os elementos

$$t_i := \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{i-1}(\beta_2)^{-1}\cdots(\beta_{n-1})^{-1} \ , \ i \in \{3,\cdots,n\}$$

juntamente com t_1, t_2 satisfazem o enunciado.

□

Os caracteres $\chi_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})} \in \mathrm{Lin}(U)$, $\alpha_i \neq 0$ para cada $i \in \{1,\cdots,n-1\}$ desempenham um papel importante na nossa construção, e portanto recebem especial atenção:

Definição 2.2.5. *Um carácter* $\chi_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})} \in Lin(U)$ *diz-se não degenerado se* $\alpha_i \neq 0$ *para cada* $i \in \{1,\cdots,n-1\}$.

Podemos reformular o que foi visto até agora na seguinte proposição.

Proposição 2.2.6. *T actua transitivamente sobre o subconjunto dos caracteres não degenerados de $Lin(U)$.*

2.3 Carácter de Gelfand-Graev

Nesta secção, procedemos à definição do carácter de Gelfand-Graev de G. Para tal, começamos por recordar alguns factos sobre a indução de caracteres [4].

Proposição 2.3.1 (**Fórmula de Indução**). *Seja H grupo finito, $K \leq H$, e χ um carácter de K. Seja $\chi^H = Ind_K^H \chi$, o carácter induzido de K a H. Então temos que:*

$$\chi^H(h) = \frac{1}{|K|} \sum_{z \in H} \chi^0(zhz^{-1})$$

onde χ^0 é a extensão de χ por 0, ou seja:

$$\chi^0(h) = \begin{cases} \chi(h) & se\ h \in K \\ 0 & se\ h \notin K \end{cases}$$

A fórmula de indução permite concluír a segunda parte do seguinte resultado:

Lema 2.3.2. *Seja H grupo finito, $K \leq H$, χ carácter linear de K. Se $h \in H$ então a aplicação*

$$\begin{aligned} \chi^h : K^h &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ x &\mapsto \chi(hxh^{-1}) \end{aligned}$$

é um carácter linear de K^h. Além disso, $Ind_K^H \chi = Ind_{K^h}^H(\chi^h)$.

Uma vez que T normaliza U, temos que todos os conjugados de U por T coincidem com U, e portanto χ^t para cada $t \in T$ e $\chi \in \mathrm{Lin}(U)$ é um carácter linear de U (aliás, este facto foi assumido quando definimos a acção de T sobre $\mathrm{Lin}(U)$ na Observação 2.2.1). Assim, o lema anterior diz-nos que a indução a G de quaisquer dois caracteres lineares de U relacionados pela acção de T fornece o mesmo carácter de G. Em particular, a indução a G está bem definida sobre os caracteres não degenerados de $\mathrm{Lin}(U)$ pela Proposição 2.2.6. Finalmente, podemos definir o principal objecto de estudo deste capítulo:

Definição 2.3.3. *Seja $\chi \in Lin(U)$ não degenerado. Chamamos carácter de Gelfand-Graev de G ao carácter $Ind_U^G \chi$, que denotamos por γ. Uma representação de G que proporciona γ diz-se uma representação de Gelfand-Graev.*

2.4 Multiplicidade dos constituintes irredutíveis

Nesta secção, provamos que uma representação de Gelfand-Graev de G é livre de multiplicidades, o que completa a nossa exposição sobre o carácter de Gelfand-Graev antes de avançarmos para a construção das RGGG. Adaptamos alguns passos da prova original de Steinberg para grupos algébricos redutivos ([19], teorema 49), embora uma prova para $GL(n,q)$ possa ser encontrada no artigo original de Gelfand e Graev [5]. Assim, as ideia de Gelfand e Graev são recuperadas numa linguagem moderna.

Proposição 2.4.1. *Qualquer representação de Gelfand-Graev é livre de multiplicidades.*

Demonstração. Seja $\sigma \in \mathrm{Lin}(U)$ um carácter não degenerado, e designemos pela mesma letra uma qualquer representação linear de U que proporcione σ. Tomemos o idempotente central da álgebra de grupo $\mathbb{C}U$ canonicamente associado a σ [7]:

$$e = \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sigma(u^{-1})u \tag{2.2}$$

Sabemos que o $\mathbb{C}U$-submódulo gerado por e proporciona σ, com acção de U-módulo (esquerdo) dada por:

$$u \cdot e = \sigma(u)e \tag{2.3}$$

Portanto, o módulo induzido [7]

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}U} \mathbb{C}Ue \simeq \mathbb{C}Ge \tag{2.4}$$

é um $\mathbb{C}G$-módulo que origina uma representação de Gelfand-Graev de G, que designamos por Γ. A informação relativa às multiplicidades das subrepresentações irredutíveis de Γ encontra-se na álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}Ge)$. Com efeito, $\mathbb{C}G$ é um anel semisimples, e uma aplicação do teorema de Artin-Wedderburn permite assim decompor a álgebra de endomorfismos de $(\mathbb{C}G)e$ numa soma de álgebras matriciais sobre $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}((\mathbb{C}G)e) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C}) \tag{2.5}$$

onde r é o número de subrepresentações irredutíveis de Γ não isomorfas entre si (que existem em número finito porque G é finito) e os n_i's correspondem à multiplicidade de cada uma delas (ver [7], teorema 11.25). De acordo com (2.5), basta então mostrar que o produto em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}((\mathbb{C}G)e)$ é comutativo.

As presentes condições permitem aplicar um resultado de Curtis e Reiner (ver [7], pág. 177), que concretiza a $\mathbb{C}-$álgebra que pretendemos estudar:

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}((\mathbb{C}G)e) \simeq e(\mathbb{C}G)e^{\circ} \tag{2.6}$$

onde $e(\mathbb{C}G)e^{\circ}$ denota a álgebra oposta. Se $e(\mathbb{C}G)e$ for uma álgebra comutativa então ela e a sua oposta coincidem, pelo que basta estudar a $\mathbb{C}-$álgebra $\mathcal{H} := e(\mathbb{C}G)e$. Antes de avançarmos, vamos identificar um conjunto de geradores do $\mathbb{C}-$espaço vectorial $\mathcal{H}$ que nos será útil mais tarde. Com efeito, recordemos da secção 1.2 que:

$$B = UT = TU$$

Pela Proposição 1.1.2 e pelo Lema 1.1.3 temos então que:

$$G = BNB = (UT)N(TU) = U(TNT)U = UNU$$

Assim, se $h \in \mathcal{H}$, existem $n \in N$ e $u, u' \in U$ tais que $h = e(unu')e$. Atendendo a (2.3) temos:

$$h = e(unu')e = \sigma(u)\sigma(u')(ene) \tag{2.7}$$

Portanto, (2.7) permite concluír que $\mathcal{H}$ é gerado por elementos da forma ene com $n \in N$, ou seja:

$$\mathcal{H} = \langle \, \{ene \mid n \in N\} \, \rangle_{\mathbb{C}} \tag{2.8}$$

O nosso objectivo será agora construír um automorfismo linear ψ de $\mathbb{C}G$ que satisfaça:

1) $\forall\, a, b \in \mathbb{C}G,\ \psi(ab) = \psi(b)\psi(a)$;

2) $\psi(U) = U$

3) $\forall\, u \in U,\ \sigma(\psi(u)) = \sigma(u)$;

4) $\psi(n) = n$ para cada $n \in N$ tal que $ene \neq 0$.

Vejamos como a existência de um tal ψ garante que $\mathcal{H}$ é comutativa. Em primeiro lugar, as condições 2), 3) e 1) implicam que ψ fixa o idempotente e. Com efeito,

$$\psi(e) = \psi(\frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sigma(u^{-1})u) = \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sigma(u^{-1})\psi(u) \overset{3)\text{ e }1)}{=}$$
$$\overset{3)\text{ e }1)}{=} \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sigma((\psi(u))^{-1})\psi(u) \overset{2)}{=} \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\sigma(u^{-1})u = e \quad (2.9)$$

(note-se que condição 1) implica que $\psi(g^{-1}) = (\psi(g))^{-1}$ para cada $g \in G$). Assim, para cada $n \in N$ tal que $ene \neq 0$, resulta de (2.9) e da condição 4) que:

$$\psi(ene) \overset{1.}{=} \psi(e)\psi(n)\psi(e) \overset{4.}{=} ene \quad (2.10)$$

Atendendo a (2.10), podemos concluír que $\psi|_{\mathcal{H}} = id_{\mathcal{H}}$. Assim, dados $a, b \in \mathcal{H}$ temos que:

$$ab = \psi(ab) \overset{1.}{=} \psi(b)\psi(a) = ba \quad (2.11)$$

e portanto $\mathcal{H}$ é comutativo.

Para concluír a prova, resta construír ψ. Começamos por considerar a aplicação

$$\theta : G \to G$$
$$g \mapsto n_0 g^T n_0$$

onde

$$n_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz n_0 é uma matriz de permutação que coincide com a sua própria inversa, estando assim associada a uma involução de G. É claro que a transposição e a inversão de matrizes também correspondem a involuções de G. Pelo que θ é uma involução de G, e em particular uma bijecção.

Temos que θ é antimorfismo de grupos. Com efeito,

$$\theta(gh) = n_0(gh)^T n_0 = n_0 h^T g^T n_0 = (n_0 h^T n_0)(n_0 g^T n_0) = \theta(h)\theta(g) \quad (2.12)$$

Não é difícil provar que, se $u \in U$, então $\theta(u) \in U$. De facto, a transposição envia u numa matriz unitriangular inferior, e não é difícil então verificar que a multiplicação à esquerda e à direita por n_0 devolve uma matriz de U. Como θ é bijecção e U é finito, tem-se que

$$\theta(U) = U \tag{2.13}$$

Para cada $t \in T$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_t : G &\to G \\ g &\mapsto t\theta(g)t^{-1} \end{aligned}$$

Como θ é anti-automorfismo de G e a conjugação por t é um automorfismo de G, temos que φ_t também é um anti-automorfismo de G. Consideremos agora, para cada $t \in T$, a extensão linear de φ_t à álgebra de grupo $\mathbb{C}G$, que também denotamos por φ_t. Esta família de aplicações possuí bons candidatos para ψ, uma vez que a condição 1) é naturalmente satisfeita, e a condição 2) resulta de (2.13).

Vejamos como as aplicações φ_t foram convenientemente definidas de modo a capturar a acção de T sobre $\mathrm{Lin}(U)$. Com efeito, recordando que $\sigma \in \mathrm{Lin}(U)$ foi o caracter não degenerado inicialmente escolhido, fazemos a observação de que a aplicação:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma} : U &\to \mathbb{C}^\times \\ u &\mapsto \sigma(\theta(u)) \end{aligned}$$

também é um carácter não degenerado em $\mathrm{Lin}(U)$. Uma vez que a acção de T é transitiva sobre estes, sabemos que existe $s \in T$ tal que $\widetilde{\sigma} = \sigma^s$. Definimos então

$$\psi := \varphi_s$$

Com esta escolha, ψ satisfaz a condição 3), uma vez que para cada $u \in U$ temos que:

$$\sigma(\psi(u)) = \sigma(s\theta(u)s^{-1}) = \sigma^s(\theta(u)) = \widetilde{\sigma}(\theta(u)) = \sigma(\theta(\theta(u))) = \sigma(u)$$

A verificação da propriedade 4) pode ser encontrada em [6], capítulo 8, secção 8.1, teorema 8.1.3.

□

Capítulo 3

Breve discussão geral da construção

As motivações originais que levaram Kawanaka a procurar por uma família de caracteres de $GL(n,q)$ (e mais geralmente para os grupos finitos do tipo Lie) podem ser encontradas em [12]. No entanto, para os nossos fins, motivamos a discussão que se segue atendendo aos resultados de decomposição para o carácter de Gelfand-Graev: pretende-se encontrar uma família pequena (de preferência, finita) de caracteres a partir da qual se possa obter informação complementar à que o carácter de Gelfand-Graev nos fornece. A construção do carácter de Gelfand-Graev sugere procurar caracteres de subgrupos de U (notação do capítulo 2), de modo a induzi-los a $GL(n,q)$. No entanto, mesmo a descrição dos caracteres lineares destes subgrupos não é fácil. A ideia para contornar este problema consiste em atender a uma relação entre $GL(n,q)$ e a álgebra de Lie completa $\mathfrak{gl}(n,q)$ das matrizes $n \times n$, que apenas pode ser clarificada no contexto dos grupos finitos do tipo Lie. A teoria para estes grupos pressupõe um vasto leque de técnicas e resultados que no entanto poderemos simplificar no nosso caso. Contudo, elas sustentam alguns dos resultados que iremos utilizar. A construção da família de caracteres para $GL(n,q)$ que vamos apresentar no nosso trabalho é, como já foi dito, uma adaptação das ideias originais de Kawanaka, que por natureza é ainda algo extensa, mesmo no nosso caso. Assim, aproveitamos esta secção para resumir brevemente a estrutura da segunda parte do nosso trabalho:

O nosso objectivo final será estabelecer uam relação entre as classes de semelhança de matrizes nilpotentes na álgebra de Lie geral finita $\mathfrak{gl}(n,q)$ e certos caracteres de $GL(n,q)$, dos quais o carácter de Gelfand-Graev será um deles. Focamo-nos assim no estudo das classes nilpotentes de $\mathfrak{gl}(n,q)$. O capítulo 4 introduz o grupo $GL(n,q)$ e a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,q)$ num contexto que nos permitirá considerar as classes nilpotentes de $\mathfrak{gl}(n,K)$ onde K denota o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$. Numa situação em que o corpo base é algebricamente fechado, adaptamos as ideias preliminares de Dynkin [25] no âmbito das álgebras de Lie semisimples complexas: a cada matriz nilpotente $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ associaremos de maneira canónica uma subálgebra, a que chamamos *subálgebra de Jacobson-Morozov* de X. A construção de subálgebras de Jacobson-Morozov requer no entanto algum trabalho em característica positiva, onde em particular a teoria da representação da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, K)$ desempenhará um papel fundamental. Neste sentido, o capítulo 5 é dedicado a um estudo intensivo desta teoria. As consequências deste estudo serão sistematizadas no capítulo 6, onde é feita uma breve discussão dos aspectos estruturais das subálgebras parabólicas standard de $\mathfrak{gl}(n, K)$, e onde veremos como associar a cada matriz nilpotente de $\mathfrak{gl}(n, K)$ a sua subálgebra de Jacobson-Morozov. Veremos ainda como matrizes nilpotentes induzem subálgebras de Jacobson-Morozov "conjugadas". Estes resultados de conjugação serão essenciais para que possamos resumir a nossa construção à indução de caracteres (resultará que os CGGG estão bem definidos. Conseguiremos ainda associar a cada matriz nilpotente $X \in \mathfrak{gl}(n, q)$ uma $\mathbb{F}_q-$subálgebra nilpotente associativa $\mathfrak{n}_X$, que coincide com os pontos fixos do nilradical da sua respectiva subálgebra de Jacobson-Morozov ambiente, na linguagem do capítulo 4. O passo final da nossa construção assenta numa aplicação do método das órbitas de Kirillov à $\mathbb{F}_q-$álgebra nilpotente associativa $\mathfrak{n}_X$, que permite associar canonicamente a X um carácter irredutível χ_X de um subgrupo conjugado de algum radical unipotente em $GL(n, q)$. O carácter $\Gamma_X := \mathrm{ind}_{U_X}^{GL(n,q)} \chi_X$ corresponderá ao carácter desejado. No capítulo 7, revemos os aspectos essenciais do método de Kirillov adaptado à nossa situação, e definimos os CGGG de $GL(n, q)$. O facto de Γ_X depender apenas da classe de semelhança de X será uma consequência dos nossos resultados de conjugação para as subálgebras de Jacobson-Morozov, recuperando assim a ideia inicial de uma ligação entre as classes nilpotentes de $\mathfrak{gl}(n, q)$ e alguns caracteres de $GL(n, q)$.

Capítulo 4

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos alguma da linguagem que necessitaremos para formular a construção dos CGGG. Observações na última secção deste capítulo enquadrarão o nosso estudo num contexto mais geral, que motivará por sua vez um dos aspectos mais importantes da nossa construção: a adaptação de algumas das ideias preliminares que conduzem à classificação de Dynkin-Kostant das órbitas nilpotentes de uma álgebra de Lie semisimples complexa.

4.1 $GL(n,q)$ e o grupo ambiente $GL(n,K)$

Ao longo desta secção, K é uma extensão do corpo $\mathbb{F}_q$, onde q é potência de um primo p. Para uma breve revisão dos conceitos e dos resultados que vamos utilizar ao longo da nossa discussão, referimos o leitor às secções 1, 7, 8, e 9 do livro [20].

Recordamos que $GL(n,K)$ é a variedade afim correspondente ao aberto principal do espaço afim $\mathbb{A}^{n^2}$ onde a função $d : \mathbb{A}^{n^2} \to K,\ X \mapsto \det X$ não se anula. Da definição de produto matricial resulta que a multiplicação $m : GL(n,K) \times GL(n,K) \to GL(n,K),\ (A,B) \mapsto AB$ tem componentes polinomiais. A inversão $i : GL(n,K) \to GL(n,K),\ X \mapsto X^{-1}$ também possuí componentes polinomiais, de acordo com a regra de Cramer. Assim, a multiplicação e a inversão em $GL(n,K)$ são morfismos de variedades afins, pelo que $GL(n,q)$ é um grupo algébrico linear conexo (uma vez que $GL(n,K)$ é aberto principal de $\mathbb{A}^{n^2}$, e qualquer aberto não vazio de um espaço irredutível também é irredutível).

Enquanto variedade afim, a álgebra afim de $GL(n,K)$ corresponde à localização do anel de polinómios $K[x_{i,j}]$ pela função $\det\,(x_{i,j})$. Relembremos que para estabelecer um morfismo de variedades afins $\varphi : X \to Y$ basta fornecer um homomorfismo de $K-$álgebras associativas com identidade $\varphi* : A(Y) \to A(X)$ entre as suas álgebras afins. Em particular, o facto de car $K = p$ implica que a correspondência $x_{i,j} \mapsto x_{i,j}^q$ estende-se a um endomorfismo $F^* : K[x_{i,j}] \to K[x_{i,j}]$. Uma vez que a função $\det(x_{i,j})$ é invertível na sua localização, podemos estender F^* à algebra afim de $GL(n, K)$. Não é difícil concluír que F^* induz o seguinte morfismo

$$\begin{aligned} F : GL(n, K) &\to GL(n, K) \\ (a_{i,j}) &\mapsto (a_{i,j}^q) \end{aligned}$$

Na verdade, poderíamos em primeiro lugar ter definido F, e depois argumentar que o determinante de qualquer matriz invertível na imagem continua a ser diferente de zero. No entanto, preferimos continuar a realçar a natureza geométrico-algébrica do grupo $GL(n, K)$. F é uma bijecção, embora a sua inversa não seja morfismo. Como car $K = p$ e q é potência de p, F é no entanto um isomorfismo de grupos. F costuma designar-se por *morfismo de Frobenius standard*, ou simplesmente *morfismo de Frobenius* (cf. capítulo 1.17 de [6]). Notemos que os pontos fixos do morfismo de Frobenius correspondem aos pontos da variedade $GL(n, K)$ cujas coordenadas $(a_{i,j})$ satisfazem $a_{i,j} = a_{i,j}^q$. Como $\mathbb{F}_q$ é o corpo de decomposição do polinómio $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$, concluímos que os pontos fixos de F correspondem precisamente aos pontos de $GL(n, K)$ cujas coordenadas pertencem a $\mathbb{F}_q$. Portanto, $GL(n, q)$ é o subgrupo dos pontos fixos de F. Nestas condições, é usual chamarmos a $GL(n, K)$ o *grupo ambiente* de $GL(n, q)$.

Observação 4.1.1. *Sempre que tivermos $H \subset GL(n, K)$, denotamos por H^F o conjunto dos pontos de H que são fixos por F, que em geral pode ser vazio. No entanto, quando $H \subset GL(n, K)$ é um subgrupo $F-$estável, a identidade é sempre fixa por F, e H^F é um subgrupo de $GL(n, q)$ a que chamamos os* ***pontos fixos*** *de H. Pela discussão anterior, vemos que os pontos fixos de um subgrupo $F-$estável H correspondem precisamente às matrizes de H com todas as entradas em $\mathbb{F}_q$, ou seja $H^F = H \cap GL(n, q)$. Em particular, $GL(n, q) = GL(n, K)^F$ como já tinhamos visto.*

Acontece que os subgrupos de $GL(n, K)$ relevantes nas nossas futuras construções serão sempre $F-$estáveis. Em particular, os subgrupos parabólicos de $GL(n, K)$ e os seus radicais unipotentes são $F-$estáveis. Isto resulta imediatamente da definição de F e da Observação 1.2.2, pois a imagem por F de qualquer matriz diagonal por blocos invertíveis continua a ser desta forma. Assim, pela Observação 4.1.1, os subgrupos parabólicos de $GL(n, q)$ correspondem biunívocamente aos pontos fixos dos subgrupos parabólicos de $GL(n, K)$, e analogamente para os seus respectivos radicais unipotentes.

4.2 $\mathfrak{gl}(n,q)$ e a sua álgebra ambiente $\mathfrak{gl}(n,K)$

Ao longo desta secção, K é uma extensão do corpo $\mathbb{F}_q$, onde q é potência de um primo p.

A álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,K)$ é um espaço vectorial de dimensão n^2 sobre K, e portanto enquanto variedade afim corresponde ao espaço $\mathbb{A}^{n^2}$. Vimos atrás que $x_{i,j} \mapsto x_{i,j}^q$ é um endomorfismo da $K-$álgebra associativa com identidade $K[x_{i,j}]$. Mas $K[x_{i,j}]$ é a álgebra afim de $\mathbb{A}^{n^2}$, e portanto temos um morfismo

$$\begin{aligned} F' : \mathfrak{gl}(n,K) &\to \mathfrak{gl}(n,K) \\ (a_{i,j}) &\mapsto (a_{i,j}^q) \end{aligned}$$

Não havendo ambiguidade, também chamamos a F' o *morfismo de Frobenius*, e utilizamos a mesma letra F para denotar esta aplicação. O facto de termos car$K = p$ implica agora que F é homomorfismo de álgebras de Lie. Pela mesma discussão que foi feita acima, $\mathfrak{gl}(n,q)$ corresponde aos pontos fixos de $\mathfrak{gl}(n,K)$ por F. Utilizando para subconjuntos de $\mathfrak{gl}(n,K)$ a mesma notação introduzida na Observação 4.1.1, temos agora que $\mathfrak{gl}(n,q) = \mathfrak{gl}(n,K)^F$, e também chamamos a $\mathfrak{gl}(n,K)$ a *álgebra ambiente* de $\mathfrak{gl}(n,q)$. Mais geralmente, os pontos fixos de uma subálgebra $F-$invariante correspondem a uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,q)$. Não é difícil verificar que podemos fazer uma discussão completamente paralela à que foi feita para os subgrupos parabólicos de $GL(n,K)$, mas agora para as subálgebras parabólicas standard de $\mathfrak{gl}(n,K)$ e seus respectivos nilradicais (estes serão introduzidos no capítulo 6).

4.3 Classes nilpotentes na álgebra ambiente

De acordo com o capítulo 3, estamos motivados a relacionar as classes nilpotentes de $\mathfrak{gl}(n,q)$ com alguns caracteres de $GL(n,q)$. Portanto será natural começarmos por estudar estas mesmas classes. De facto, a classificação das classes nilpotentes sobre qualquer corpo é um exercício elementar da Álgebra Linear, que no entanto decidimos relembrar de modo a ilustrar os representantes destas classes. Estes representantes, que não são mais do que as formas canónicas de Jordan para matrizes nilpotentes, serão importantes no nosso estudo.

Proposição 4.3.1. *Seja E um corpo. As classes nilpotentes de $M(n,E)$ estão parametrizadas pelas partições de n. Em particular, existem $|p(n)|$ classes nilpotentes.*

Demonstração. Uma vez que os valores próprios de uma matriz nilpotente são todos nulos, resulta que qualquer matriz nilpotente de $M(n,E)$ é semelhante à sua forma canónica de Jordan, cujos blocos são da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Basta então ordenar os blocos de Jordan por ordem decrescente de tamanho, e atendender à unicidade da forma canónica de Jordan a menos de permutação dos seus blocos.

□

Sempre que $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \vdash n$, representamos por c_λ (resp. C_λ) a classe de semelhança em $\mathfrak{gl}(n, q)$ (resp. $\mathfrak{gl}(n, K)$) da matriz nilpotente

$$N_\lambda := N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r} \tag{4.1}$$

onde N_{λ_i} é um bloco do Jordan de tamanho λ_i como descrito na prova da proposição anterior.

Note-se que a Proposição 4.3.1 diz-nos em particular que $\mathfrak{gl}(n, q)$ e a sua álgebra ambiente admitem o mesmo número de classes nilpotentes. De facto, temos o seguinte resultado em termos da linguagem dos pontos fixos pelo morfismo de Frobenius.

Proposição 4.3.2. *Para cada* $\lambda \vdash n$, $c_\lambda = C_\lambda^F = C_\lambda \cap \mathfrak{gl}(n, q)$.

Demonstração. Para cada $\lambda \vdash n$, a intersecção $C_\lambda \cap \mathfrak{gl}(n, q)$ é não vazia porque temos a matriz nilpotente N_λ, e portanto $C_\lambda \cap \mathfrak{gl}(n, q)$ é uma união de classes nilpotentes em $\mathfrak{gl}(n, q)$. Assim, existem pelo menos $|p(n)|$ classes nilpotentes em $\mathfrak{gl}(n, q)$. Donde cada $C_\lambda \cap \mathfrak{gl}(n, q)$ é uma única classe nilpotente em $\mathfrak{gl}(n, q)$, porque esta admite o mesmo número de classes nilpotentes que a sua álgebra ambiente.

□

4.4 Algumas observações

Observamos que a facilidade com que relacionámos as classes nilpotentes da álgebra de Lie finita $\mathfrak{gl}(n, q)$ com a sua álgebra ambiente $\mathfrak{gl}(n, K)$ é privilegiada. O que está em causa é a natureza das matrizes "mudança de base". Na verdade, podemos contextualizar o nosso problema de classificação numa abordagem mais geral, e que em particular mostra como o nosso trabalho se generaliza para outros grupos.

Seja K um corpo, e G um grupo algébrico linear sobre K (aqui, um subgrupo fechado de $GL(n, K)$ para a topologia de Zariski, para algum $n \in \mathbb{N}$). Relembremos que o espaço tangente a G na matriz identidade I_n admite uma estrutura de álgebra de Lie. Se $m : G \times G \to G$ for a multiplicação de G e KG a sua álgebra afim, o parentesis de Lie pode ser definido através da sua comultiplicação $m^* : KG \to KG \otimes KG$, reflectindo assim a estrutura do grupo G em termos lineares (referimos o capítulo 9 de [20] para os aspectos essenciais desta construção).

Com a mesma notação, seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Recordemos que a conjugação de G por qualquer elemento é um automorfismo interno de G. Seja C_g um tal automorfismo, com $g \in G$. Como em particular I_n é fixa por C_g, o diferencial deste automorfismo em I_n dá origem a um automorfismo de $\mathfrak{g}$ que denotamos por $\mathrm{Ad}(g)$, e que designamos por *representação adjunta de g*. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\to GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad(g) \end{aligned}$$

é uma representação de G sobre $\mathfrak{g}$ (enquanto grupo abstracto), chamada a *representação adjunta de G*. A respectiva acção de G sobre $\mathfrak{g}$ diz-se a *acção adjunta* de G.

Especializamos a discussão anterior para o caso em que $G = GL(n, K)$. Como $GL(n, K)$ é um aberto do espaço afim $\mathbb{A}^{n^2}$, o seu espaço tangente na matriz identidade é isomorfo a $M(n, K)$. O parentesis de Lie em $M(n, K)$ coincide então com o comutador de matrizes ([20], secção 9.3), pelo que $\mathfrak{gl}(n, K)$ é a álgebra de Lie de $GL(n, K)$. Também podemos ver que a representação adjunta de $X \in GL(n, K)$ é dada pela conjugação em $\mathfrak{gl}(n, K)$ por X ([20], lema B da secção 10.3). Assim, concluímos que as classes de semelhança em $\mathfrak{gl}(n, K)$ correspondem às órbitas da acção adjunta de $GL(n, K)$. Na verdade, a acção adjunta de qualquer subgrupo fechado de $GL(n, K)$ na sua respectiva álgebra de Lie corresponde à conjugação por elementos desse mesmo grupo (note-se que estas álgebras de Lie mergulham-se naturalmente em $\mathfrak{gl}(n, K)$ pelo diferencial em I_n das inclusões dos respectivos grupos em $GL(n, K)$).

Proposição 4.4.1. *Seja $G \subseteq GL(n, K)$ um subgrupo fechado e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, K)$ a sua álgebra de Lie. Se $g \in G$, então $Ad(g)(X) = g^{-1}Xg$, $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. cf. proposição 10.3 de [20].

□

Pela discussão acima, o nosso problema traduz-se na classificação das órbitas da acção adjunta de $GL(n, K)$ que contêm alguma matriz nilpotente. Estas órbitas costumam-se designar por *órbitas nilpotentes*, mesmo quando consideramos a acção adjunta de qualquer outro subgrupo fechado de $GL(n, K)$. A Proposição 4.4.1 sugere assim que a generalização, para outros grupos algébricos lineares, da construção que aqui vamos propor começa por atender à classificação das órbitas nilpotentes da sua acção adjunta.

Quando $K = \mathbb{C}$, a correspondência de Lie permite reformular este problema de maneira ainda mais natural, uma vez que podemos partir de qualquer álgebra de Lie linear: Dada uma álgebra de Lie linear $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, colocamos o problema de classificar as órbitas nilpotentes da acção do grupo $G_{\mathrm{ad}} := \mathrm{Ad}(G)$, onde G é o único grupo de Lie linear conexo $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$.

Um estudo indirecto do problema anterior no caso em que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ é semisimples deve-se a Dynkin [25], onde o teorema de Jacobson-Morozov ([14], teorema 3.3.1) é utilizado de maneira essencial. De facto, o teorema de Jacobson-Morozov, juntamente com um resultado devido a Kostant ([14], teorema 3.4.10) permitem concluír que as órbitas nilpotentes de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ semisimples estão em bijecção com as $G_{\mathrm{ad}}-$classes de subálgebras de $\mathfrak{g}$ isomorfas a $\mathfrak{sl}(2, K)$. Esta bijecção é o ponto de partida para a *classificação de Dynkin-Kostant* das órbitas nilpotentes de uma álgebra de Lie semisimples (não necessariamente linear) complexa.

Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ semisimples. Os resultados preliminares que conduzem à classificação de Dynkin-Kostant contêm uma ideia que por si só nos será extremamente útil: a existência de uma relação entre os centralizadores de matrizes nilpotentes de $\mathfrak{g}$ e algumas subálgebras parabólicas ([14], lema 3.8.4 e observação 3.8.5).

O enquadramento do nosso problema neste contexto sugere uma adaptação a $\mathfrak{gl}(n, K)$ das ideias subjacentes à classificação de Dynkin-Kostant, quando K é algebricamente fechado e car $K > 0$. Embora $\mathfrak{gl}(n, K)$ não seja uma álgebra de Lie semisimples, veremos que a sua estrutura não afecta o nosso objectivo. Assim, começaremos por estudar os aspectos relevantes da teoria da representação de $\mathfrak{sl}(2, K)$ para o nosso caso. O culminar desse estudo pode ser visto como uma adaptação dos resultados de Jacobson-Morozov e Kostant para $\mathfrak{gl}(n, K)$ quando K é algebricamente fechado e car $K > 0$. No entanto, será necessário impor restrições adicionais sobre a característica de modo a obtermos resultados. Ocuparemo-nos destas questões no próximo capítulo.

Capítulo 5

Teoria da Representação de $\mathfrak{sl}(2, K)$

Ao longo deste capítulo, K denota um corpo algebricamente fechado, e supomos que car $K \neq 2$ sempre que a característica for positiva. Por outro lado, as álgebras de Lie que consideraremos na nossa discussão serão sempre de dimensão finita sobre K. Utilizaremos a notação usual $[x, y]$ para denotar o parentesis de Lie de quaisquer dois elementos x e y de uma álgebra de Lie.

5.1 Generalidades

Começamos por rever conceitos e resultados num quadro suficientemente geral para a discussão dos aspectos relevantes da teoria da representação de $\mathfrak{sl}(2, K)$ em característica positiva. Ao longo desta secção, fixamos um espaço vectorial V de dimensão finita sobre o corpo K. Recordemos que uma transformação linear $\mathcal{N} \in \mathrm{End}(V)$ diz-se *nilpotente* se $\mathcal{N}^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Uma transformação linear $\mathcal{S} \in \mathrm{End}(V)$ diz-se *diagonalizável* se as raízes do seu polinómio mínimo sobre K forem todas distintas. É claro que, fixada uma base $\mathfrak{B}$ de V, uma transformação $\mathcal{T} \in \mathrm{End}(V)$ é nilpotente (diagonalizável) se e só se a matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ for nilpotente (diagonalizável), pelo que as noções e os resultados que se seguem podem ser transportados sem dificuldade para qualquer subespaço de $M(n, K)$. Também será útil fazer a seguinte

Observação 5.1.1. *Seja W um subespaço de V. Se $\mathcal{S} \in End(V)$ for diagonalizável, então $\mathcal{S}|_W \in End(W)$ também é diagonalizável. Atendendo à definição, este facto resulta do polinómio mínimo de $\mathcal{S}|_W$ dividir o polinómio mínimo de $\mathcal{S}$.*

Seja agora $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie. Recordemos que uma *representação* de $\mathfrak{L}$ sobre V é um homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(V)$, onde $\mathfrak{gl}(V)$ denota a álgebra de Lie $\text{End}(V)$ para o comutador. Fixemos uma representação ρ de $\mathfrak{L}$. A *dimensão* de ρ corresponde por definição à dimensão de V. Uma vez que estamos a assumir que V tem dimensão finita, será antes correcto falarmos em *representações de dimensão finita.* Fixada uma base $\mathfrak{B}$ de V e supondo que $\dim V = n$, a aplicação $P : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(n, K)$, $x \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\rho(x))$ é um homomorfismo de álgebras de Lie (onde $\mathfrak{gl}(n, K)$ denota a álgebra de Lie $M(n, K)$ para o comutador), a que chamamos a *representação matricial* proporcionada por ρ.

Observação 5.1.2. *Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie. Para cada $x \in \mathfrak{L}$, a bilinearidade do parentesis de Lie implica que*

$$\begin{aligned} ad(x) : \mathfrak{L} &\to \mathfrak{L} \\ y &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

é um endomorfismo linear de $\mathfrak{L}$, e que a aplicação

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{L} &\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{L}) \\ x &\mapsto ad(x) \end{aligned}$$

é linear. Além disso, a identidade de Jacobi implica que ad é uma representação de $\mathfrak{L}$, chamada a representação adjunta .

Vejamos que a representação adjunta de uma álgebra de Lie linear $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ "preserva"a nilpotência e a diagonalidade dos seus elementos.

Lema 5.1.3. *Seja $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Temos que:*

(a) Se x é diagonalizável, então $ad(x)$ também é diagonalizável.

(b) Se x é nilpotente, então $ad(x)$ também é nilpotente.

Demonstração. Seja $n := \dim V$. Suponhamos que x é diagonalizável. Então existe uma base ordenada $\mathfrak{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ de V tal que $\mathcal{M}_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}}(x) = \text{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ com $a_i \in K$. Fixemos a base canónica $\mathfrak{B}' = \{e_{i,j}\}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ relativamente a $\mathfrak{B}$, ou seja tal que $e_{i,j}(v_k) = \delta_{j,k} v_i$. Não é difícil de concluir então que $ad(x)(e_{i,j}) = (a_i - a_j)e_{i,j}$. Donde $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}'}(ad(x))$ é matriz diagonal. Suponhamos agora que x é nilpotente. Para cada $y \in \mathfrak{gl}(V)$, $ad(x)(y) = xy - yx = \lambda_x(y) - \rho_x(y)$, onde λ_x e ρ_x são as translacções usuais de $\mathfrak{gl}(V)$ por x. Então $ad(x) = \lambda_x - \rho_x$. Mas $\lambda_x - \rho_x$ é nilpotente, uma vez que λ_x e ρ_x também são nilpotentes (porque x é nilpotente) e $\lambda_x \rho_x = \rho_x \lambda_x$ (pelo que o binómio de Newton é válido).

□

Relembremos que também é possível conceptualizar a noção de representação de uma álgebra de Lie através da noção de *módulo*. Com efeito, seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie. Dizemos que um espaço vectorial W de dimensão finita sobre K é um $\mathfrak{L}-$*módulo* se W estiver munido de uma multiplicação por elementos de $\mathfrak{L}$ (que denotamos usualmente por $\cdot$) tal que, para cada $x, y \in \mathfrak{L}$, $\alpha, \beta \in K$ e $v, w \in W$:

- $(\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha(x \cdot v) + \beta(y \cdot v)$
- $x \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(x \cdot v) + \beta(x \cdot w)$
- $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$

É claro que com esta definição, o estudo dos $\mathfrak{L}-$módulos é equivalente ao estudo das representações de $\mathfrak{L}$. No entanto, será desejável enquadrar esta definição no contexto dos módulos sobre álgebras associativas com identidade. A maneira usual de fazermos isto é associar a cada álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ uma certa álgebra associativa com identidade $\mathfrak{U}$, tal que as representações de $\mathfrak{U}$ capturem os aspectos "universais"de qualquer representação de $\mathfrak{L}$. A formalização desta ideia assenta na noção de *álgebra envolvente universal*, que explicamos resumidamente a seguir.

Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie. Sempre que $\mathfrak{U}$ for uma álgebra associativa com identidade, denotamos por $\mathfrak{U}_L$ a respectiva álgebra de Lie para o comutador. Uma *álgebra envolvente universal* de $\mathfrak{L}$ é um par $(\mathfrak{U}, \iota)$, onde $\mathfrak{U}$ é uma álgebra associativa com identidade e $\iota : \mathfrak{L} \to \mathfrak{U}_L$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, tal que $(\mathfrak{U}, \iota)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Seja $\mathfrak{L}'$ uma álgebra associativa com identidade, e $\rho : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'_L$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe um único homomorfismo de álgebras associativas com identidade $\rho' : \mathfrak{U} \to \mathfrak{L}'$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}_L = \mathfrak{U} \arrow[dr, dotted, "\rho'"] & \\
\mathfrak{L} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{L}'_L = \mathfrak{L}'
\end{tikzcd}$$

É possível provar os seguintes resultados ([22], capítulo V, teorema 1):

1) Existe um par $(\mathfrak{U}, \iota)$ nas condições referidas acima.

2) A imagem $\iota(\mathfrak{L})$ gera $\mathfrak{U}$.

3) Se $(\mathfrak{U}', \iota')$ for uma álgebra envolvente universal de $\mathfrak{L}$, então existe um único isomorfismo de álgebras associativas com identidade $\psi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ tal que $\psi \circ \iota = \iota'$.

Atendendo a 3), é costume falarmos da álgebra envolvente universal (ou simplesmente, álgebra envolvente) de $\mathfrak{L}$. Denotamos a álgebra envolvente de $\mathfrak{L}$ por $U(\mathfrak{L})$. Em particular, resulta desta construção que qualquer representação de $\mathfrak{L}$ pode ser estendida a uma representação da álgebra associativa com identidade $U(\mathfrak{L})$. Assim, o estudo das representações de $\mathfrak{L}$ é equivalente ao estudo dos $U(\mathfrak{L})-$módulos. Deste modo, a linguagem e os resultados standard da teoria dos módulos sobre anéis comutativos com identidade aplicam-se neste contexto.

Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie e W um $\mathfrak{L}-$módulo. Tendo em conta a discussão anterior, teremos sempre presente a ideia de que podemos estender a multiplicação de W aos elementos da álgebra envolvente $U(\mathfrak{L})$. Também identificamos os elementos de $\mathfrak{L}$ com os geradores de $U(\mathfrak{L})$ de acordo com 2). Em particular, para cada $x, y \in \mathfrak{L}$, o elemento $[x, y]$ escreve-se como $xy - yx$ em $U(\mathfrak{L})$.

5.2 Pesos e vectores maximais

Relembremos que $\mathfrak{sl}(2, K)$ admite uma base canónica $\{x, y, h\}$, onde

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Em particular, não é difícil verificar que as seguintes relações de comutação são satisfeitas:

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h \tag{5.1}$$

Seja agora V um $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo. Suponhamos que h actua diagonalmente sobre V (em característica 0 isto é sempre verdade em virtude do teorema de Weyl, cf. corolário 6.4 do livro [21]). Então V decompõe-se em soma directa de subespaços próprios $V_\lambda := \{v \in V \mid h.v = \lambda v\}$, $\lambda \in K$ (é claro, V_λ ainda faz sentido mesmo quando λ não é valor próprio do endomorfismo que representa h, se definirmos $V_\lambda = 0$ neste caso). Sempre que $V_\lambda \neq 0$, dizemos que λ é um *peso* de h, e chamamos a V_λ um *subespaço de peso*. Vejamos como x e y actuam em qualquer subespaço de V da forma V_λ.

Lema 5.2.1. *Se* $v \in V_\lambda$*, então* $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ *e* $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$*.*

Demonstração. Com efeito, vejamos que $x \cdot v$ é vector próprio de h (isto é, do endomorfismo linear de V que representa h) associado ao valor próprio $\lambda+2$. Este resultado é consequência das relações de comutação em $\mathfrak{sl}(2, K)$. Com efeito:

$$h \cdot (x \cdot v) = [h, x] \cdot v + x \cdot (h \cdot v) = (2x) \cdot v + \lambda(x \cdot v) = (\lambda + 2)(x \cdot v)$$

Analogamente, concluí-se o resultado para y.

□

Se car $K = 0$, o Lema 5.2.1 implica que tem que existir algum subespaço de peso V_λ tal que $V_{\lambda+2} = 0$, uma vez que V tem dimensão finita sobre K. Para um tal $\lambda \in K$, chamamos a qualquer vector não nulo de V_λ um *vector maximal* de peso λ (ou simplesmente vector maximal, quando o peso λ estiver subentendido). Em particular, resulta da definição que se $x \in V_\lambda$ for vector maximal então $x \cdot v = 0$.

5.3 Existência e classificação dos $\mathfrak{sl}(2, K)$-módulos simples

Começamos por descrever, em característica nula, os $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulos simples. Veremos que alguns aspectos desta descrição podem então transportar-se para o caso de característica positiva. Concluímos ainda a existência de $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulos simples em característica positiva quando esta é "suficientemente grande".

Suponhamos que car $K = 0$. Seja V um $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo simples. Pela discussão na secção anterior, sabemos que existe um vector maximal $v_0 \in V_\lambda$ para algum peso $\lambda \in K$. Por abuso de notação, será costume utilizarmos a mesma letra para denotar um inteiro e a sua imagem usual no subcorpo primo de K.

Lema 5.3.1. *Defina-se* $v_i := y^i \cdot v_0$ *para cada inteiro não negativo* i*, onde* $y^0 := 0$*. Temos que:*

(a) $h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i$

(b) $y \cdot v_i = v_{i+1}$

(c) $x \cdot v_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1},\ i \geq 1$

Demonstração. A alínea (a) resulta de aplicar o Lema 5.2.1 repetidamente. Já a alínea (b) resulta imediatamente da definição. Quanto à alínea (c), ela é satisfeita para $i = 1$ porque

$$x \cdot v_1 = x \cdot (y \cdot v_0) = [x, y] \cdot v_0 + y \cdot (x \cdot v_0) \stackrel{\dagger}{=} h \cdot v_0 = \lambda v_0$$

onde † resulta das relações de comutação e do facto de v_0 ser vector maximal com peso λ. Assim, a prova de (c) segue-se por indução em i. Com efeito, se $i \geq 2$

$$\begin{aligned} x \cdot v_i \stackrel{*}{=} x \cdot (y \cdot v_{i-1}) = [x, y] \cdot v_{i-1} + y \cdot (x \cdot v_{i-1}) &\stackrel{**}{=} \\ = (\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)(y \cdot v_{i-2}) &\stackrel{***}{=} \\ = (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (i-1)(\lambda - i + 2)v_{i-1} &= \\ = i(\lambda - i + 1)v_{i-1} & \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde * vem da definição de v_i, ** resulta da alínea (a) e da hipótese de indução, e *** resulta da alínea (b).

□

A alínea (a) do lema anterior implica que o conjunto $\{v_i\}_{i \geq 0}$ é linearmente independente sobre K. Uma vez que a dimensão de V sobre K é finita, tem que existir um inteiro não negativo m tal que $v_m \neq 0$ e $v_{m+1} = 0$. Seja m minimal neste sentido. Então é claro que $v_{m+i} = 0$ para qualquer $i > 0$. O lema anterior implica que o subespaço U gerado por $\{v_0, \cdots, v_m\}$ é um submódulo não nulo de V. Donde $U = V$ porque V é simples. Em particular, resulta que V é soma directa de $m+1$ subespaços de peso, pois a alínea (a) do lema anterior implica que todos estes subespaços têm dimensão 1. Assim, h possuí $m + 1$ pesos distintos.

Mais pode ser dito acerca dos pesos de h. Com efeito, resulta da alínea (c) que, para $i = m+1$, tem-se que $(m+1)(\lambda-m)v_m = 0$ (porque $v_{m+1} = 0$). Como $v_m \neq 0$ e $m + 1 \neq 0$, tem-se que $\lambda = m$. Ou seja, o peso de um vector maximal em V nestas condições é um elemento do subcorpo primo de K, unicamente determinado pela dimensão de V (dim $V = m + 1$) e ao qual chamamos *peso dominante* de V. Assim, os $m + 1$ pesos distintos de h pertencem ao subcorpo primo de K pela alínea (a) do lema anterior. Por fim, o facto destes pesos serem todos distintos entre si implica que qualquer vector maximal de V é necessariamente de peso dominante m, e portanto um múltiplo escalar de v_0 uma vez que os subespaços de peso têm todos dimensão 1.

O Lema 5.3.1 sugere a concretização de um $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo sobre o qual h actua diagonalmente, mesmo quando a característica de K é positiva e "suficientemente grande". Com efeito, seja V um espaço vectorial de dimensão finita $m + 1$ sobre K, e seja $\mathfrak{B} = \{v_0, \cdots, v_m\}$ uma base de V. Defina-se uma multiplicação de elementos da base canónica de $\mathfrak{sl}(2, K)$ por elementos de $\mathfrak{B}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i,\ i = 0, \cdots, m \\ &y \cdot v_i = v_{i+1},\ i = 0, \cdots, m-1, \quad y \cdot v_m = 0 \\ &x \cdot v_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1},\ i = 1, \cdots, m, \quad x \cdot v_0 = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Não é difícil verificar que V é um $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo para a multiplicação assim definida. Também é claro da definição que h actua diagonalmente sobre V. Além disso, v_0 é por construção um "vector maximal"de V. Se car $K > m$, então o peso de v_0 é m, e portanto um elemento do subcorpo primo de K unicamente determinado pela dimensão de V. Assim, tem sentido aplicar a noção de *peso dominante* a qualquer $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo V descrito por (5.3), desde que car $K \geq$ dim V. Os pesos de h também são todos distintos neste caso porque assumimos que car $K \neq 2$.

Resumimos as observações anteriores no seguinte resultado, que classifica em característica positiva os $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulos simples sobre os quais h actua diagonalmente.

Teorema 5.3.2. *Seja V um $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo simples não nulo e sobre o qual h actua diagonalmente. Suponhamos que car $K \geq$ dim V. Então:*

1. *h actua sobre V com pesos $\lambda = m, m-2, \cdots, -(m-2), -m$ onde $m = \dim V - 1$, tal que cada subespaço de peso tem dimensão 1.*

2. *V admite um único vector maximal v_0 (a menos de escalar), cujo peso dominante é m.*

3. *O conjunto $\{v_0, \cdots, v_m\}$ onde $v_i := y^i \cdot v_0$ forma um base de V, relativamente à qual a acção dos elementos da base canónica sobre V é dada pelo Lema 5.3.1.*

Provamos agora a existência de $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulos sobre os quais h actua diagonalmente, quando a característica é positiva. Mas pelo que vimos acima, basta apenas provar que o módulo cuja multiplicação é dada por (5.3) é simples.

Proposição 5.3.3. *Seja $m <$ car K um inteiro não negativo. Seja V um espaço vectorial de dimensão $m+1$ sobre K, e seja $\mathfrak{B} = \{v_0, \cdots, v_m\}$ uma base de V. Defina-se uma multiplicação de elementos da base canónica de $\mathfrak{sl}(2, K)$ por elementos de $\mathfrak{B}$ da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} &h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i,\ i = 0, \cdots, m \\ &y \cdot v_i = v_{i+1},\ i = 0, \cdots, m-1, \quad y \cdot v_m = 0 \\ &x \cdot v_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1},\ i = 1, \cdots, m, \quad x \cdot v_0 = 0 \end{aligned}$$

Com esta multiplicação, V é um $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo simples sobre o qual h actua diagonalmente.

Demonstração. Resta apenas provar que este módulo é simples. Com efeito, seja U um submódulo não nulo de V. Seja $v \in U$ com $v \neq 0$. Como $\mathfrak{B}$ é uma base, $v = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i$. Em particular, existe $k \in \{0, \cdots, m\}$ tal que $v = \lambda_k v_k + \cdots + \lambda_m v_m$ com $\lambda_k \neq 0$. Da maneira coma a multiplicação foi definida resulta que $y^{m-k} \cdot v = \lambda_k x_m$. Como $v \in U$ e U é submódulo, tem-se por um lado que $y^{j-k} \cdot v \in U$. Mas como $\lambda_k \neq 0$, resulta que $x_m \in U$. Por outro lado, seja $j \in \{1, \cdots, m-1\}$. Pela hipótese sobre a característica de K, tem-se que $i(m-i+1) \neq 0$ para cada $i \in \{1, \cdots, m-1\}$. Donde $x^j \cdot x_m = \lambda x_{m-j}$ com $\lambda \neq 0$. Como $x_m \in U$ e U é um submódulo, vem que x_{m-j}. Pela generalidade de j, concluímos então que $\mathfrak{B} \subset U$, donde $U = V$. $\square$

No caso em que car $K \leq m$, não é difícil verificar que o módulo anterior admite submódulos próprios não nulos (por exemplo, com a mesma notação da proposição anterior, se car $K = m$ então $\{v_1, \cdots, v_{m-1}\}$ gera um submódulo não nulo de V).

Para cada inteiro não negativo $m <$ car K, denotamos por $V(m)$ o $\mathfrak{sl}(2,K)-$módulo da Proposição 5.3.3. A menos de isomorfismo, este módulo é único para cada m pela descrição dada na Teorema 5.3.2. Concluímos assim o seguinte resultado.

Teorema 5.3.4. *Para cada inteiro não negativo $m <$car K, existe um único $\mathfrak{sl}(2,K)-$módulo simples $V(m)$. Temos que h actua diagonalmente sobre $V(m)$ com peso dominante m, e que em particular todos os seus pesos pertencem ao subcorpo primo.*

5.4 $\mathfrak{sl}(2,K)$-módulos semisimples em característica positiva

Se car $K = 0$, sabemos que $\mathfrak{sl}(2,K)$ é uma álgebra de Lie simples, e que portanto todos os $\mathfrak{sl}(2,K)-$módulos são semisimples de acordo com o teorema de Weyl. No entanto, o seguinte exemplo mostra como este argumento falha em característica positiva.

Exemplo 5.4.1. *Se car $K \geq 3$, então $\mathfrak{sl}(2,K)$ é uma álgebra de Lie simples. Com efeito, suponhamos que $\mathfrak{I}$ é um ideal não nulo de $\mathfrak{sl}(2,K)$ gerado por uma matriz não nula A. Por um lado, sabemos que A é da forma*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Pequenos cálculos permitem verificar as seguinte relações

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} c & -2a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2a & b \end{pmatrix}$$

Não é difícil concluír por casos que os elementos da base canónica de $\mathfrak{sl}(2, K)$ *pertencem a* $\mathfrak{I}$*, donde* $\mathfrak{I} = \mathfrak{sl}(2, K)$*. Por outro lado, seja* $K[X, Y]^{(m)}$ *o espaço vectorial dos polinómios homogéneos de grau* m *em indeterminadas* X *e* Y *e com coeficientes sobre* K*. Recordemos que é possível definir a seguinte multiplicação em* $K[X, Y]^{(m)}$ *por elementos de* $\mathfrak{sl}(2, K)$*:*

$$h \cdot f := X\frac{\partial f}{\partial X} - Y\frac{\partial f}{\partial Y}, \quad x \cdot f := X\frac{\partial f}{\partial Y}, \quad y \cdot f := Y\frac{\partial f}{\partial X}$$

onde subentendemos a derivada de um polinómio no sentido formal. Com esta multiplicação, $K[X, Y]^{(m)}$ *é um* $\mathfrak{sl}(2, K)-$*módulo para cada* $m \in \mathbb{N}$*. No entanto, se car* $K = p > 2$*, o módulo* $K[X, Y]^{(p)}$ *não é semisimples, embora* $\mathfrak{sl}(2, K)$ *seja uma álgebra de Lie simples neste caso. Com vista a um absurdo, suponhamos que o módulo* $K[X, Y]^{(p)}$ *é semisimples. Seja* W *o subespaço gerado pelos monómios* X^p *e* Y^p*. Uma vez que* p *é a característica de* K*, resulta que as derivadas formais de* X^p *e* Y^p *são zero. Portanto,* W *é um submódulo de* $K[X, Y]^{(p)}$ *com multiplicação trivial. Por hipótese, existe um submódulo complementar não nulo* V*. Seja* $f \in V$ *com* $f \neq 0$*. Então* $f = \sum_{k=n}^{p} c_k X^k Y^{p-k}$ *para algum* $n < p$ *tal que* $n \neq 0$ *e* $c_n \in K \setminus \{0\}$*. Mas então* $p - n > 0$ *e* $x^{p-n} \cdot f = c_n X^p$*, donde* $X^p \in V$ *o que não é verdade.*

No entanto, é possível provar que um $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo é semisimples se uma certa condição de nilpotência sobre a acção da álgebra envolvente $U(\mathfrak{sl}(2, K))$ se verificar. Uma prova deste resultado, devida a Spaltenstein, pode encontrar-se em [6], pelo que omitimos a sua prova. No entanto, alertamos o leitor para duas diferenças na literatura anteriormente referida.

- No início do capítulo 5.4 de [6], são feitos diversos cálculos preliminares na álgebra envolvente de $U(\mathfrak{sl}(2, K))$ que consideram o elemento $-h$ ao invés de h na base canónica de $\mathfrak{sl}(2, K)$. É claro que isto não altera a generalidade dos nossos resultados. Em particular, existem apenas alterações de sinal na acção descrita na Proposição 5.3.3 para os módulos $V(m)$.

- Em [6], o autor chama *vector minimal* ao que nós chamamos vector maximal, e vice-versa. Contudo, a adaptação das provas resulta em argumentos praticamente "simétricos"no nosso caso.

Fixemos a seguinte notação para as imagens dos elementos x e y da base canónica de $\mathfrak{sl}(2, K)$ na sua álgebra envolvente:

$$X := \iota(x), \ Y := \iota(y)$$

Podemos agora enunciar o resultado pretendido.

Teorema 5.4.2. *Seja V um $\mathfrak{sl}(2,K)-$módulo, que proporciona uma representação ρ. Suponhamos que existe um inteiro positivo $m \geq 2$ para o qual se tem que $\rho(X^{m-1}) = 0$ e $\rho(Y^{m-1}) = 0$. Suponhamos que $m \leq$ car K e que car $K \neq 2$. Então V é completamente redutível.*

Demonstração. cf. proposição 5.4.7 de [6].

□

5.5 $\mathfrak{sl}_2-$triplos de $\mathfrak{gl}(n, K)$

As duas próximas secções serão o culminar do nosso estudo da teoria da representação de $\mathfrak{sl}(2,K)$, onde provamos que toda a matriz nilpotente de $\mathfrak{gl}(n,K)$ induz uma graduação inteira desta mesma, desde que $n <$car K. O primeiro passo é verificar que qualquer matriz nilpotente de $\mathfrak{gl}(n,K)$ pertence a uma subálgebra 3-dimensional isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,K)$. Veremos que este último facto não depende da característica de K no nosso caso, mas antes do facto de termos ao nosso dispor certas representações matriciais de $\mathfrak{sl}(2,K)$ obtidas à custa dos módulos $V(m)$ anteriormente estudados. No entanto, uma vez que estes módulos foram apenas definidos para $m <$ car K em característica positiva, continuaremos a supor que car $K > n$.

Definição 5.5.1. *Um triplo $\{X, Y, H\}$ de elementos em $\mathfrak{gl}(n,K)$ diz-se um $\mathfrak{sl}_2-$triplo se os elementos X, Y e H satisfazem as seguintes relações de comutação:*

$$[H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y,\ [X, Y] = H$$

Resulta imediatamente da definição que a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,K)$ gerada por um $\mathfrak{sl}_2-$triplo $\{X, Y, H\}$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,K)$ (cf. (5.1)).

Consideremos agora o módulo $V(m)$ ($m <$car K), e seja $\mathfrak{B}$ uma base de $V(m)$ na qual a multiplicação por elementos da base canónica de $\mathfrak{sl}(2,K)$ é dada como na Proposição 5.3.3. Defina-se $\mathfrak{B}' := \{v'_0, \cdots, v'_m\}$ onde

$$v'_0 := v_0,\ v'_m := v_m$$

$$v'_i := (\mu_i \mu_{i-1} \cdots \mu_1)^{-1} v_i,\ 1 \leq i \leq m-1,\ \mu_i := i(m-i+1)$$

É claro que $\mathfrak{B}'$ é uma base de $V(m)$. Se $\rho_m : \mathfrak{sl}(2,K) \to \mathfrak{gl}(m+1,K)$ for a representação matricial proporcionada por $V(m)$ relativamente a $\mathfrak{B}'$, então não é difícil concluír que

$$\rho_m(h) = \begin{pmatrix} m & & & & \\ & m-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(m-2) & \\ & & & & -m \end{pmatrix}$$

$$\rho_m(y) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \mu_1 & 0 & & & \\ & \mu_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu_m & 0 \end{pmatrix}, \ \rho_m(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

A razão pela qual preferimos trabalhar com estas representações matriciais torna-se evidente com a seguinte observação.

Observação 5.5.2. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \vdash n$ uma partição de n, e consideremos a matriz nilpotente $X_\lambda := N_\lambda$, onde N_λ é dada como em (4.1). Notemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, r\}$*

$$N_{\lambda_i} = \rho_{\lambda_i - 1}(x)$$

Isto sugere definir as matrizes

$$Y_\lambda = \rho_{\lambda_1 - 1}(y) \oplus \cdots \oplus \rho_{\lambda_r - 1}(y)$$

$$H_\lambda = \rho_{\lambda_1 - 1}(h) \oplus \cdots \oplus \rho_{\lambda_r - 1}(h)$$

Resulta imediatamente da construção anterior que $\{X_\lambda, Y_\lambda, H_\lambda\}$ é um $\mathfrak{sl}_2-$ $-$triplo. Portanto existem $\mathfrak{sl}_2-$triplos em $\mathfrak{gl}(n, K)$.

Para cada $\lambda \vdash n$ definimos as matrizes X_λ, Y_λ e H_λ tal como na Observação 5.5.2, e chamamos ao $\mathfrak{sl}_2-$triplo $\{X_\lambda, Y_\lambda, H_\lambda\}$ o *triplo canónico de tipo λ*. Note-se que, com esta definição, $\{0, 0, 0\}$ é o $\mathfrak{sl}_2-$triplo canónico de tipo $(1, \cdots, 1)$.

Observação 5.5.3. *Note-se que, qualquer que seja a matriz invertível $X \in GL(n, K)$, $A, B \in \mathfrak{gl}(n, K)$*

$$X^{-1}[A, B]X = [X^{-1}AX, X^{-1}BX] \tag{5.5}$$

Seja $\{A_1, A_2, A_3\}$ um $\mathfrak{sl}_2-$triplo. Dizemos que um triplo $\{A'_1, A'_2, A'_3\}$ é ***conjugado*** *de $\{A_1, A_2, A_3\}$ se existir $B \in GL(n, K)$ tal que $A'_i = B^{-1}A_iB$. Por (5.5), todos os triplos conjugados de um $\mathfrak{sl}_2-$triplo também são $\mathfrak{sl}_2-$ $-$triplos.*

De facto, a Observação 5.5.3 diz-nos que $GL(n, K)$ actua por conjugação no conjunto dos $\mathfrak{sl}_2-$triplos de $\mathfrak{gl}(n, K)$, o que justifica a nossa terminologia. Estamos agora em condições de provar que toda a matriz nilpotente de $\mathfrak{gl}(n, K)$ pertence a algum $\mathfrak{sl}_2-$triplo.

Proposição 5.5.4 (Jacobson-Morozov). *Seja $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ uma matriz nilpotente. Então existem $Y, H \in \mathfrak{gl}(n, K)$ tais que $\{X, Y, H\}$ é um $\mathfrak{sl}_2-$triplo.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ uma matriz nilpotente. Então X é semelhante à matriz X_λ para uma única partição $\lambda \vdash n$. Em particular, existe $B \in GL(n, K)$ tal que $X = B^{-1}X_\lambda B$. Definam-se as matrizes $Y := B^{-1}Y_\lambda B$ e $H := B^{-1}H_\lambda B$. O triplo $\{X, Y, H\}$ é conjugado do triplo canónico de tipo λ, e portanto um $\mathfrak{sl}_2-$triplo pela Observação 5.5.3. □

5.6 Graduações de Jacobson-Morozov

Seja $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ uma matriz nilpotente. Seja $a(X)$ a subálgebra gerada por algum $\mathfrak{sl}_2-$triplo que contenha X (que sabemos que existe pela Proposição 5.5.4). Como sabemos $a(X)$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, K)$. Seja $\phi : \mathfrak{sl}(2, K) \to a(X)$ um tal isomorfismo. Então $\mathrm{ad}|_{a(X)} \circ \phi : \mathfrak{sl}(2, K) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(n, K))$ é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, K)$ sobre $\mathfrak{gl}(n, K)$.

Proposição 5.6.1. *Seja $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ uma matriz nilpotente. Suponhamos que $2n <$ car K. Então existe uma graduação inteira $\mathfrak{gl}(n, K) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$ tal que $X \in \mathfrak{g}(2)$.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ nilpotente, e seja $a(X)$ a subálgebra gerada por algum $\mathfrak{sl}_2-$triplo $\{X, Y, H\}$ anteriormente fixo. Consideremos a restrição da acção adjunta de $\mathfrak{gl}(n, K)$ a $a(X)$. Pela alínea b) do Lema 5.1.3, as imagens de x e y em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(n, K))$ correspondem a endomorfismos nilpotentes. Uma adaptação da proposição 5.5.2 de [6] mostra que o grau de nilpotência destes endomorfismos é no máximo $2n - 1$. Assim, as nossas hipóteses permitem aplicar o Teorema 5.4.2 quando $m = 2n$. Donde $\mathfrak{gl}(n, K)$ é soma directa de submódulos irredutíveis. De acordo com a alínea a) do Lema 5.1.3, h actua diagonalmente sobre $\mathfrak{gl}(n, K)$. Mas então h também actua diagonalmente sobre cada submódulo irredutível de $\mathfrak{gl}(n, K)$ pela Observação 5.1.1. Assim, cada um destes submódulos decompõe-se numa soma directa de subspaços de peso onde h actua com pesos pertencentes ao subcorpo primo (Teorema 5.3.4). Portanto todos os subespaços próprios do endomorfismo que representa h estão associados a valores próprios pertencentes ao subcorpo primo. Donde

$$\mathfrak{gl}(n, K) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$$

com $\mathfrak{g}(i) := \{A \in \mathfrak{gl}(n, K) \mid [H, A] = iA\}$. Não é difícil concluír que $[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subseteq \mathfrak{g}(i + j)$. Por fim, $X \in \mathfrak{g}(2)$ porque $\{X, Y, H\}$ é um $\mathfrak{sl}_2-$triplo. □

Se $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ for nilpotente e $\{X, Y, H\}$ for algum $\mathfrak{sl}_2-$triplo, chamamos à graduação construída como na Proposição 5.6.1 a *graduação de Jacobson-Morozov* associada a $\{X, Y, H\}$. Para a discussão que se segue, será útil por vezes referir-nos simplesmente a um $\mathfrak{sl}_2-$triplo $\{X, Y, H\}$, onde subentendemos a escolha de uma matriz nilpotente $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ *a priori.*

Observação 5.6.2. *Podemos concluír ainda que graduações de Jacobson-Morozov associadas a $\mathfrak{sl}_2-$triplos conjugados entre si relacionam-se por um automorfismo de $\mathfrak{gl}(n, K)$. Mais concretamente, seja*

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i) \tag{5.6}$$

uma graduação de Jacobson-Morozov associada ao $\mathfrak{sl}_2-$triplo $\{X, Y, H\}$. Suponhamos que $\{X', Y', H'\}$ é conjugado de $\{X, Y, H\}$ por uma matriz $B \in GL(n, K)$. Então

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'(i) \tag{5.7}$$

*é a graduação de Jacobson-Morozov associada a $\{X', Y', H'\}$, onde $\mathfrak{g}'(i) = A^{-1}\mathfrak{g}(i)A$, para cada $i \in \mathbb{Z}$ (cf. Observação 5.5.3). É natural dizer-se então que as graduações (5.6) e (5.7) são **conjugadas**, nestas condições. Em particular, resulta que todas as matrizes pertencentes a uma mesma classe nilpotente de $\mathfrak{gl}(n, K)$ produzem graduações conjugadas entre si.*

Capítulo 6

Subálgebras de Jacobson-Morozov

Seja K o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$. Vimos na secção 5.6 como associar a cada matriz nilpotente $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ uma graduação inteira desta mesma álgebra, quando car $K > 2n$. Em resumo, esta graduação não é mais do que a decomposição de $\mathfrak{gl}(n, K)$ em subespaços próprios da acção adjunta do elemento diagonalizável de algum $\mathfrak{sl}_2-$triplo que contém X. Veremos como estas graduações descrevem uma classe de subálgebras que se revelarão úteis para a nossa construção dos CGGG de $GL(n, q)$. Como já vimos, $\mathfrak{sl}_2-$triplos conjugados entre si produzem graduações conjugadas entre si. Assim, após a identificação destas subálgebras, esperaremos poder relacioná-las de modo análogo. A importância destas relações de conjugação será evidente quando definirmos os CGGG enquanto caracteres induzidos (uma ideia já utilizada na construção do carácter de Gelfand-Graev, cf. Lema 2.3.2).

6.1 Subálgebras Parabólicas Standard

Fixemos um corpo K algebricamente fechado, que não necessariamente o fecho algébrico de $\mathbb{F}_q$. A discussão que se segue admite alguns paralelos com a discussão anteriormente feita para os subgrupos parabólicos de um grupo linear completo. Em particular, notaremos a existência de uma configuração de subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, K)$, que por sua vez nos permitirá isolar uma família específica de subálgebras. A configuração anteriormente referida pode ser encarada, de algum modo, com o mesmo papel que um par$-(B, N)$ de $GL(n, K)$ tem na especificação dos seus subgrupos parabólicos (cf. Proposição 1.2.1). O facto de K ser algebricamente fechado será útil para discutir questões de diagonalização.

Começamos por relembrar o seguinte lema, reformulado em dimensão finita com o propósito de o aplicarmos a matrizes quadradas de tamanho finito.

Lema 6.1.1. *Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre K. Sejam $S, T \in End_K(V)$ diagonalizáveis. Suponhamos que $S \circ T = T \circ S$. Então T e V partilham uma mesma base de vectores próprios.*

Demonstração. Começemos por verificar que S estabiliza todo o subespaço próprio de T. Com efeito, seja $v \in V$ um vector próprio de T associado a um valor próprio $\lambda \in K$ (K é algebricamente fechado). Então

$$T(S(v)) = S(T(v)) = S(\lambda v) = \lambda S(v)$$

pelo que $S(v)$ é vector próprio de T associado a λ, o que mostra que o subespaço próprio associado a λ é $S-$invariante.

Por outro lado, T é diagonalizável, pelo que V admite uma base de vectores próprios de T. Seja

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma(T)} V_\lambda$$

a decomposição de V em subespaços próprios de T, onde $\Sigma(T)$ é o conjunto dos valores próprios de T. Pela observação inicial, S estabiliza cada subespaço V_λ. De acordo com a Observação 5.1.1, a restrição de S a cada V_λ também é diagonalizável, e portanto cada V_λ admite uma base $\mathfrak{B}_\lambda$ de vectores próprios de S, que também são $\lambda-$vectores próprios de T. Assim, $\mathfrak{B} := \cup_{\lambda \in \Sigma(T)} \mathfrak{B}_\lambda$ é uma base de vectores próprios de S e T.

$\square$

Do Lema 6.1.1 não é difícil concluír que

Proposição 6.1.2. *Seja V um espaço vectorial de dimensão finita sobre K. Seja $\mathcal{F} \subset End_K(V)$ uma família comutativa de endomorfismos diagonalizáveis, i.e $S \circ T = T \circ S$ quaisquer que sejam $S, T \in \mathcal{F}$. Então todo os endomorfismos de $\mathcal{F}$ partilham uma mesma base de vectores próprios.*

Consideremos agora $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n, K)$ enquanto espaço vectorial de dimensão finita sobre K. A nossa estratégia consiste em decompor $\mathfrak{gl}(n, K)$ atendendo aos resultados anteriores, e recorrendo à estrutura proveniente do seu comutador natural. Para este efeito, relembramos que $\mathfrak{g}$ actua sobre ela mesma através da representação adjunta ad: $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_K(\mathfrak{g})$ (cf. Observação 5.1.2). Em particular, a imagem $\mathrm{ad}(\mathfrak{t}) \subset \mathrm{End}_K(\mathfrak{g})$ da subálgebra abeliana $\mathfrak{t}$ das matrizes diagonais encontra-se nas condições da Proposição 6.1.2, atendendo ao Lema 5.1.3. Interpretando a Proposição 6.1.2 e atendendo a como se define a representação adjunta, podemos concluír que $\mathfrak{g}$ admite a seguinte decomposição:

$$\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^* \setminus 0} \mathfrak{g}_\alpha \right) \tag{6.1}$$

onde $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ é o centralizador de $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^*$ é o dual de $\mathfrak{t}$ enquanto espaço vectorial, e $g_\alpha := \{ \ X \in \mathfrak{g} \mid [T, X] = \alpha(T)X, \ \text{para cada } T \in \mathfrak{t} \ \}$ (note-se então que $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$). Como $\mathfrak{t}$ é abeliana, $\mathfrak{t} \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. De facto, $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ desde que K seja "suficientemente grande".

Lema 6.1.3. *Suponhamos que K admite pelo menos $n+1$ elementos distintos. Então qualquer matriz de $\mathfrak{gl}(n, K)$ que comute com todas as matrizes diagonais é necessariamente diagonal. Em particular $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$. Suponhamos que

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Qualquer que seja $T = \text{diag}(t_1, \cdots, t_n) \in \mathfrak{t}$, temos que

$$XT = \begin{pmatrix} x_{11}t_1 & x_{12}t_2 & \cdots & x_{1n}t_n \\ x_{21}t_1 & x_{22}t_2 & \cdots & x_{2n}t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}t_1 & x_{n2}t_2 & \cdots & x_{nn}t_n \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

$$TX = \begin{pmatrix} x_{11}t_1 & x_{12}t_1 & \cdots & x_{1n}t_1 \\ x_{21}t_2 & x_{22}t_2 & \cdots & x_{2n}t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}t_n & x_{n2}t_n & \cdots & x_{nn}t_n \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Suponhamos que $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Pela hipótese, existe uma matriz $T' \in X$ da forma $T' = \text{diag}(t'_1, \cdots, t'_n)$ com todos os t'_i distintos e não nulos. Por (6.2) e (6.3), não é então difícil concluír que as entradas de X fora da diagonal são necessariamente nulas. Donde $X \in \mathfrak{t}$.

□

É claro que o Lema 6.1.3 aplica-se, uma vez que estamos a supor K algebricamente fechado. No entanto, notamos que a condição do Lema 6.1.3 é válida mesmo quando car $K > n$ (e K não necessariamente algebricamente fechado), uma restrição que tem surgido ao longo do nosso trabalho.

Temos assim uma decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}^* \setminus 0} \mathfrak{g}_\alpha \right) \tag{6.4}$$

Voltamos a atender ao Lema 5.1.3. Na demonstração de que a representação adjunta de qualquer endomorfismo diagonalizável de um espaço vectorial V é ainda diagonalizável, calculámos de facto como é que a representação adjunta de uma matriz diagonal actua nos elementos da base canónica $\mathfrak{B}' = \{e_{i,j}\}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ (cf. Lema 5.1.3). Adaptando para o caso em que $V = \mathfrak{gl}(n, K)$, a base canónica $\mathfrak{B}'$ é agora formada pelas matrizes elementares $E_{i,j}$, e se $T = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_n)$ então

$$\mathrm{ad}(T)E_{i,j} = (t_i - t_j)E_{i,j} \tag{6.5}$$

Portanto (6.5) mostra que cada subespaço da decomposição (6.4) é definido por um funcional linear de $\mathfrak{t}$ da forma

$$\alpha_{i,j} : \mathfrak{t} \to K, \quad \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_n) \mapsto t_i - t_j \tag{6.6}$$

para cada $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$. Em particular, a decomposição (6.4) é finita, e $\mathfrak{g}_{i,j} := \mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}}$ é o subespaço gerado por $E_{i,j}$.

Observação 6.1.4. *É claro que $\mathfrak{gl}(n, K)$ se pode escrever como soma directa*

$$\mathfrak{gl}(n, K) = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} < E_{i,j} > \right)$$

pelo que o nosso trabalho parece desnecessário. Contudo, a abordagem via representação adjunta da álgebra $\mathfrak{t}$ fornece pistas que apontam para uma generalização das nossas considerações a outras álgebras de Lie. Na verdade, a decomposição (6.1) é bem conhecida no âmbito da classificação das álgebras de Lie semisimples sobre um corpo algebricamente fechado com característica nula, onde $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ é substituída por uma ***subálgebra de Cartan*** *$\mathfrak{h}$, e os funcionais lineares α estão intímamente ligados aos* ***sistemas de raízes*** *(ver e.g [15]). A respectiva decomposição é conhecida por* ***decomposição de Cartan****. A nossa abordagem até (6.1) é de algum modo feita no capítulo 8 de [21] para álgebras de Lie semisimples sobre um corpo algebricamente fechado com característica nula, onde $\mathfrak{t}$ corresponde a uma subálgebra maximal abeliana formada por elementos cuja representação adjunta é diagonalizável. Em particular, a não degenerescência da forma de Killing nesta situação permite retirar fortes conclusões sobre a estrutura da decomposição (6.1). No entanto, relembramos que esta não degenerescência é uma consequência do critério de Cartan, que pode falhar em característica positiva (e.g em $\mathfrak{sl}(p, K)$ com car $K = p \neq 2$). Voltamos a relembrar que os trabalhos de classificação de Dynkin [25] focam-se nas álgebras de Lie semisimples complexas.*

Ainda assim, $\mathfrak{gl}(n, K)$ é de certo modo a álgebra de Lie linear mais "completa", o que a coloca numa situação privilegiada no sentido em que *muitos destes aspectos podem ser contornados, como acabámos de ver. De facto, $\mathfrak{gl}(n,K) = \mathfrak{sl}(n,K) \oplus \mathfrak{s}(n,K)$ onde $\mathfrak{s}(n,K)$ corresponde à subálgebra das matrizes escalares, desde que car K não divida n (cf. exercício 7 do capítulo 1 de [21]), pelo que $\mathfrak{gl}(n,K)$ "é semisimples a menos de matrizes escalares".*

Atendendo à Observação 6.1.4, definimos o chamado *conjunto das raízes* de $\mathfrak{gl}(n,K)$:

$$\Phi := \{ \ (i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n, \ i \neq j\}$$

Em particular, chamaremos *raízes positivas* aos elementos do conjunto

$$\Phi^+ := \{ \ (i,j) \in \Phi \mid i < j\}$$

Por (6.6), temos que $\alpha_{i,j} + \alpha_{j,k} = \alpha_{i,k}$, pelo que tem sentido definir uma soma parcial no conjunto Φ

$$(i,j) + (j,k) := (i,k)$$

sempre que $i \neq k$. É claro que a soma de raízes positivas (quando definida) é ainda uma raíz positiva. Ainda por (6.6), observamos que as raízes positivas da forma $(i,i+1)$ não se escrevem como soma de duas raízes positivas distintas. Assim, chamaremos *raízes simples* aos elementos do conjunto

$$\Phi^0 = \{ \ (i,j) \in \Phi^+ \mid j = i+1 \ \}$$

Em particular, $\mathfrak{gl}(n,K)$ possuí $n-1$ raízes simples. Ordenamos estas raízes de acordo com a relação induzida no produto cartesiano pela ordem natural, definindo assim

$$e_i := (i,i+1), \ i = 1, \cdots, n-1$$

Seja agora $\mathfrak{b}$ a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,K)$ definida da seguinte maneira

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

Note-se que $\mathfrak{b}$ não é mais do que a subálgebra das matrizes triangulares superiores, agora descrita através da decomposição (6.4). A mesma decomposição permite descrever uma família de subálgebras de $\mathfrak{gl}(n,K)$ que contém $\mathfrak{b}$.

Definição 6.1.5. *Para cada subconjunto de raízes simples* $\Theta \subseteq \Phi^0$, *a subálgebra* $\mathfrak{p}_\Theta$ *gerada pelo conjunto*

$$\{\mathfrak{t}, g_\alpha \mid \alpha \in \Phi^0 \text{ ou } -\alpha \in \Theta\}$$

diz-se uma ***subálgebra parabólica standard*** *de* $\mathfrak{gl}(n, K)$ *(relativamente a* $\mathfrak{b}$*).*

Em particular, $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{p}_{\Phi^0} = \mathfrak{gl}(n, K)$, e não é difícil concluír que cada subálgebra parabólica standard é da forma

$$\mathfrak{p}_\lambda := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix} : A_i \in M(\lambda_i, K) \right\} \tag{6.7}$$

para alguma composição $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \vDash n$. Em particular, $\mathfrak{gl}(n, K)$ admite 2^{n-1} subálgebras parabólicas standard (cf. Proposição 1.2.1, Observação 1.2.2 e Proposição 1.2.3). Assim, também denotaremos estas subálgebras por $\mathfrak{p}_\lambda$ sempre que $\lambda \vDash n$, onde $\mathfrak{p}_\lambda$ é dada por (6.7).

As subálgebras parabólicas standard admitem uma decomposição análoga à decomposição de Levi dos subgrupos parabólicos (cf. Proposição 1.2.4).

Proposição 6.1.6 (Decomposição de Levi). *Seja* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \vDash n$ *e* $\mathfrak{p}_\lambda$ *uma subálgebra parabólica standard de* $\mathfrak{gl}(n, K)$*. Então* $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \oplus n_\lambda$, *onde*

$$\mathfrak{l}_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix} : A_i \in M(\lambda_i, K) \right\}$$

$$\mathfrak{n}_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0_{\lambda_r} \end{pmatrix} \right\}$$

com 0_{λ_i} *uma matriz nula* $\lambda_i \times \lambda_i$.

Para cada $\lambda \vDash n$, é claro que $\mathfrak{n}_\lambda$ é uma subálgebra nilpotente, e de facto o maior ideal nilpotente de $\mathfrak{p}_\lambda$, a que chamamos o o seu *nilradical.* Note-se que todos estes nilradicais correspondem a subálgebras da álgebra nilpotente $\mathfrak{u}$ das matrizes triangulares superiores com diagonal nula (de facto, $\mathfrak{u} = \mathfrak{n}_{(1,\cdots,1)}$). Veremos que estas serão essencialmente as subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, K)$ relevantes para a construção dos CGGG de $GL(n, q)$.

6.2 Subálgebra parabólica de uma graduação de Jacobson-Morozov

A parte inicial da discussão que se segue servirá apenas como motivação. A prova dos resultados relevantes será devidamente referenciada, tendo em conta a vastidão de conceitos, técnicas e ferramentas envolvidas. Contudo, julgamos ter conseguido resumir os aspectos essenciais do ponto de vista dos nossos interesses. Este longo caminho será recompensado pela simplicidade com que poderemos verificar que os CGGG estão bem definidos.

Começamos com a seguinte observação.

Observação 6.2.1. *Recordemos que, para cada $X \in GL(n, K)$, temos um automorfismo de $\mathfrak{gl}(n, K)$ dado pela conjugação $A \mapsto X^{-1}AX$. Chamaremos* ***automorfismo interno*** *de $\mathfrak{gl}(n, K)$ a um automorfismo desta forma (do ponto de vista do que foi discutido na secção 4.4 do capítulo 4, a acção adjunta do grupo algébrico $GL(n, K)$ sobre a sua álgebra de Lie realiza-se por automorfismos internos de $\mathfrak{gl}(n, K)$). Assim, sempre que $\mathfrak{a}$ for uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, K)$, referimo-nos a uma* ***conjugada*** *de $\mathfrak{a}$ como sendo a imagem de $\mathfrak{a}$ por algum automorfismo interno.*

A decomposição (6.4), não sendo mais do que a decomposição de subespaços "simultaneamente próprios"para a acção adjunta de todas as matrizes diagonais de $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n, K)$, sugere a existência de uma relação com as graduações de Jacobson-Morozov (Proposição 5.6.1). Para isto, começemos por recordar brevemente a construção destas graduações, quando car $K > n \geq 2$:

Dada uma matriz nilpotente $X \in \mathfrak{g}$, inserimo-la em algum $\mathfrak{sl}_2-$triplo $\{X, Y, H\}$, e consideramos a decomposição de $\mathfrak{g}$ em subespaços próprios da representação adjunta de H (que é diagonalizável):

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i) \tag{6.8}$$

Esta graduação é inteira porque $\mathfrak{g}$, enquanto $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulo semisimples (Teorema 5.4.2), decompõe-se em submódulos simples, descritos de acordo com o Teorema 5.3.4.

Por outro lado, o facto de H ser diagonalizável diz-nos que H é semelhante a uma matriz de $\mathfrak{t}$ por definição. Portanto existe alguma conjugada $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{t}$ tal que $H \in \mathfrak{h}$. Além disso, como $\mathfrak{h}$ também é abeliana, tem-se que $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ corresponde a uma família comutativa de endomorfismos diagonalizáveis que contém $\mathrm{ad}(H)$. Donde resulta a decomposição

$$\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus 0} \mathfrak{g}_\alpha \right) \tag{6.9}$$

Observamos que da definição temos que qualquer g_α encontra-se contido no $\alpha(H)-$subespaço próprio de $\mathrm{ad}(H)$, e $\alpha(H)$ é essencialmente um inteiro de acordo com a teoria da representação de $\mathfrak{sl}(2,K)$. Donde, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus 0$, tem-se $g_\alpha \subseteq \mathfrak{g}(i)$ para algum $i \in \mathbb{Z}$. É claro que

$$\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(H) = \mathfrak{g}(0)$$

Estas observações sugerem que, tomando o conjunto dos funcionais $\Psi^+ \subseteq \mathfrak{h}^*$ cujos valores em H são inteiros não negativos, a subálgebra

$$\bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{g}(i) \tag{6.10}$$

proveniente da graduação (6.8) contém

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Psi^+} \mathfrak{g}_\alpha \right) \tag{6.11}$$

De facto, é possível provar que (6.11) é conjugada de alguma subalgebra parabólica standard de $\mathfrak{gl}(n,K)$. Em resumo, temos a seguinte proposição, que é central na nossa construção dos CGGG de $GL(n,q)$.

Proposição 6.2.2. *Seja $X \in \mathfrak{gl}(n,K)$ nilpotente, e seja*

$$\mathfrak{gl}(n,K) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$$

uma graduação de Jacobson-Morozov. Então existe $\lambda \vDash n$ tal que

$$\mathfrak{p}_X := \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{g}(i)$$

é conjugada de $\mathfrak{p}_\lambda$. Em particular, se $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{l}_\lambda \oplus \mathfrak{n}_\lambda$ for a sua decomposição de Levi, tem-se que

1. *$\mathfrak{l}_X := \mathfrak{g}(0)$ é conjugada de $\mathfrak{l}_\lambda$,*
2. *$\mathfrak{n}_X := \bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}(i)$ é conjugada de $\mathfrak{n}_\lambda$.*

A demonstração da proposição anterior envolve diversos argumentos que decidimos não recriar. Ainda assim, é instrutivo referir alguns aspectos:

1. Ideias análogas às que levaram à decomposição (6.4) são estudadas de um ponto de vista mais geral em [15], capítulo VII, §1., onde a noção de *raíz* surge de maneira análoga à noção de peso introduzida no âmbito da teoria da representação de $\mathfrak{sl}(2,K)$ (cf. últimos parágrafos do nosso capítulo 5.2).

Como já foi referido na Observação 6.1.4, o conceito de *subálgebra de Cartan* captura o papel do centralizador de qualquer álgebra conjugada de $\mathfrak{t}$, e generaliza a construção das raízes introduzidas para $\mathfrak{gl}(n, K)$. Em [15], capítulo VII, §2. discutem-se estas subálgebras com alguma generalidade, provando em particular a sua existência em álgebras de Lie sobre corpos infinitos. O caso em que o corpo é algebricamente fechado e a característica é nula volta a ser conhecido, sobretudo no âmbito das álgebras semisimples ([15], capítulo VII, §2. N 4.). Um estudo sistemático da estrutura destas subálgebras, bem como das subálgebras que as contêm, passa por um conhecimento sólido dos aspectos geométricos dos sistemas de raízes ([17], capítulo IV). Em particular, descrevem-se as subálgebras que contêm alguma subálgebra resolúvel maximal (*subálgebras de Borel*), e que recebem o nome de *subálgebras parabólicas* ([15] capítulo VIII, §2.). Com o auxílio de alguns resultados de conjugação é possível concluír que as subálgebras parabólicas que contêm uma determinada subálgebra de Borel descrevem-se no sentido da Definição 6.1.5, e que as subálgebras da forma $\mathfrak{p}_X$ como descritas na Proposição 6.2.2 correspondem de facto a subálgebras parabólicas ([15] capítulo VII, §3. e capítulo VIII, §3.). No nosso caso, $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan, e $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra de Borel: chamámos assim subálgebras parabólicas standard às subálgebras parabólicas (no sentido mais geral) que contêm $\mathfrak{b}$.

2. Relembremos a decomposição

$$\mathfrak{gl}(n, K) = \mathfrak{sl}(n, K) \oplus \mathfrak{s}(n, K) \tag{6.12}$$

que foi mencionada no final da Observação 6.1.4, válida desde que car K não divida n, quando a característica é positiva. Como foi dito, $\mathfrak{gl}(n, K)$ é "quase semisimples". De facto, será útil tornarmos esta afirmação mais precisa. Com efeito, do ponto de vista da acção adjunta de $\mathfrak{gl}(n, K)$, os elementos de $\mathfrak{s}(n, K)$ aniquilam $\mathfrak{gl}(n, K)$ (de facto, $\mathfrak{s}(n, K)$ corresponde ao centro de $\mathfrak{gl}(n, K)$). Assim, proposições sobre a "parte semisimples"de (6.12) podem ser seguramente transportadas para $\mathfrak{gl}(n, K)$ (cf. [15] capítulo VII, proposição 2. da pág. 13, e também na mesma referência, capítulo VIII, observação 4. da pág. 82). Em particular, é possível aplicar a $\mathfrak{gl}(n, K)$ discussão feita no primeiro ponto.

3. A discussão feita no capítulo VII de Bourbaki [15] recorre de maneira decisiva à não degenerescência da forma de Killing. Será útil referir que as álgebras de Lie de grupos algébricos lineares semisimples gozam de propriedades de não degenerescência para característica suficientemente grande. Em particular, $\mathfrak{sl}(n, K)$ não é mais do que a álgebra de

Lie do grupo algébrico simples $SL(n, K)$ (e.g [20], último parágrafo do capítulo 9.4), e neste caso a forma de Killing é não degenerada desde que car $K > n$ (ver secção 1.13 de [6]), o que é compatível com a restrição imposta ao longo do nosso estudo. Atendendo ao que foi dito no ponto anterior, podemos então transportar estes resultados para $\mathfrak{gl}(n, K)$. Em particular, resulta dos pontos 1. e 2. que é possível provar a Proposição 6.2.2.

Atendendo à discussão referida nos pontos anteriores, também temos o seguinte resultado (ver lema 3.8.1 de [14], pág. 51 e cf. com a nossa Definição 6.1.5)

Proposição 6.2.3. *Duas subálgebras parabólicas standard $\mathfrak{p}_\lambda$ e $\mathfrak{p}_{\lambda'}$ são conjugadas entre si se e só se $\lambda = \lambda'$.*

Chamaremos *subálgebra de Jacobson-Morozov* a uma subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_X$ nas condições da Proposição 6.2.2, para algum $\mathfrak{sl}_2-$triplo da forma $\{X, Y, H\}$.

De facto, em característica nula, nomeadamente no caso complexo, as subálgebras de Jacobson-Morozov estão unicamente determinadas pela matriz nilpotente X, e não dependem do $\mathfrak{sl}_2-$triplo que o contém. Aliás, este é um resultado válido para qualquer álgebra de Lie semisimples complexa (cf. [14] observação 3.8.5, pág. 52). Entre alguns resultados preparatórios, a pedra basilar na prova deste resultado assenta num lema devido a Kostant (e.g [14] teorema 3.4.10, pág. 42), que em particular mostra como $\mathfrak{sl}_2-$triplos de X são necessariamente conjugados por um elemento do centralizador de X. Um estudo mais cuidado deste centralizador permite concluír que ele se encontra contido na subálgebra de Jacobson-Morozov associada a qualquer $\mathfrak{sl}_2-$triplo de X, donde se segue o resultado. Aproveitamos este ponto da discussão para realçar a importância do estudo dos centralizadores de elementos nilpotentes numa álgebra de Lie linear, ou no quadro ligeiramente mais geral das álgebras de Lie semisimples sobre um corpo algebricamente fechado com característica zero, onde é possível estender a noção de "nilpotência"(ver, e.g secções 4.2, 5.4 e 6.4 de [21]).

No entanto, é possível provar a unicidade das subálgebras de Jacobson-Morozov no contexto mais geral das álgebras de Lie de grupos algébricos lineares semisimples sobre um corpo algebricamente fechado com característica positiva, desde que esta seja suficientemente grande (cf. proposições 5.5.10 e 5.7.1 de [6]). Provar o análogo do lema de Kostant em característica positiva envolve no entanto técnicas e ferramentas que rapidamente ultrapassam as que introduzimos até agora. Referimos os subcapítulos 5.5, 5.6 e 5.7 do livro de Carter [6], para uma discussão detalhada dos resultados preliminares quando o grupo é simples. É possível adaptar os resultados aí descritos para o nosso caso num sentido análogo ao discutido no ponto 2. Neste sentido, referimos os chamados *grupos algébricos lineares redutivos*, que quando conexos na topologia de Zariski, admitem uma decomposição análoga a (6.12) (ver [6] capítulo 1.8).

Em particular, $GL(n, K)$ é um grupo algébrico linear redutivo conexo (vimos na secção 4.1 que ele corresponde a um aberto irredutível do espaço afim n^2-dimensional) e a respectiva decomposição corresponde a

$$GL(n, K) = SL(n, K) \cdot Z \tag{6.13}$$

onde Z é o centro de $GL(n, K)$, formado pelas matrizes escalares invertíveis. Observamos finalmente que, no nosso caso, a restrição imposta sobre a característica no livro de Carter [6] pode resumir-se à nossa, se atendermos à prova da proposição 5.3.1 do mesmo livro (de facto, a nossa construção de $\mathfrak{sl}_2-$triplos encontra-se aí ilustrada). Será útil relembrar as observações que fizemos sobre esta referência na secção 5.3, aquando da adaptação da prova de Spaltenstein para a semisimplicidade de certos $\mathfrak{sl}(2, K)-$módulos.

Portanto, se $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ nilpotente, sabemos agora pelo lema de Kostant que lhe podemos associar a sua única subálgebra de Jacobson-Morozov. Estamos em condições de provar o seguinte resultado.

Proposição 6.2.4. *Seja $\lambda \vdash n$, e seja c_λ a respectiva classe nilpotente em $\mathfrak{gl}(n, K)$. Então existe uma única composição $\lambda' \vDash n$ tal que a subálgebra de Jacobson-Morozov de cada matriz em c_λ é conjugada da subálgebra parabólica standard $\mathfrak{p}_{\lambda'}$.*

Demonstração. Sejam $X, X' \in c_\lambda$, e sejam $\mathfrak{p}_X$ e $\mathfrak{p}_{X'}$ as suas respectivas subálgebras de Jacobson-Morozov. Pela Observação 5.6.2, $\mathfrak{p}_X$ e $\mathfrak{p}_{X'}$ são conjugadas entre si. Pela Proposição 6.2.2, cada uma destas é conjugada de subálgebras parabólicas standard $\mathfrak{p}_{\lambda'_1}$ e $\mathfrak{p}_{\lambda'_2}$, respectivamente. Por transitividade temos então que $\mathfrak{p}_{\lambda'_1}$ e $\mathfrak{p}_{\lambda'_2}$ são conjugadas entre si. Donde $\lambda'_1 = \lambda'_2$ pela Proposição 6.2.3.

□

Observação 6.2.5. *De facto, apenas garantimos a existência de tal composição λ' nas condições da Proposição 6.2.3. Julgamos ser possível construír explícitamente λ' a partir de $\lambda \vdash n$ atendendo melhor aos detalhes que subentendem a demonstração da Proposição 6.2.2. A Proposição 6.2.3 traduz assim uma aplicação (combinatorial por natureza) de $p(n)$ em $c(n)$.*

Capítulo 7

CGGG do grupo $GL(n,q)$

7.1 Breve revisão do método das órbitas

Existem diversas referências que ilustram os aspectos essenciais do método das órbitas. Baseamo-nos na discussão feita em [9] e [23]. Mantemos alguma notação tradicional, onde em particular denotamos a matriz identidade I_n por 1.

Seja $\mathfrak{u}(n,q)$ a álgebra associativa e nilpotente das matrizes triangulares estritamente superiores. Relembremos que $\mathfrak{u}(n,q)$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{F}_q$ para o comutador de matrizes. Note-se que $U(n,q) = 1 + \mathfrak{u}(n,q)$, onde $U(n,q)$ é o grupo das matrizes unitriangulares superiores com entradas em $\mathbb{F}_q$. Por outro lado, uma vez que estamos a supor que $n \leq p$, a aplicação *exponencial* exp: $\mathfrak{u}(n,q) \to U$ dada por

$$\exp a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \tag{7.1}$$

está bem definida e é uma bijecção.

Ao longo da nossa discussão, fixamos uma subálgebra $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{u}(n,q)$, e denotamos $G := \exp(\mathfrak{n}) = 1 + \mathfrak{n}$. É claro que G é um subgrupo de $U(n,q)$. Notemos que o grupo G actua sobre $\mathfrak{n}$ da forma $a \mapsto g^{-1}ag$, com $a \in \mathfrak{n}$ e $g \in G$. A partir desta acção, é possível definir uma acção de G no espaço dual $\mathfrak{n}^*$ de $\mathfrak{n}$, nomeadamente

$$(g \cdot \lambda)(a) := \lambda(gag^{-1}),\ \lambda \in \mathfrak{n}^*,\ a \in \mathfrak{n},\ g \in G \tag{7.2}$$

A acção de G definida por (3.2) designa-se por *acção coadjunta*, e cada órbita desta acção diz-se uma *órbita coadjunta*.

Se $\mathfrak{n}^+$ for o grupo aditivo de $\mathfrak{n}$, então G também actua em $\mathrm{Irr}(\mathfrak{n}^+)$ de maneira natural, e existe uma aplicação $G-$equivariante do $G-$conjunto $\mathfrak{n}^*$ (para a acção coadjunta) em $\mathrm{Irr}(\mathfrak{n}^+)$: basta fixar um carácter linear não trivial θ do grupo aditivo $\mathbb{F}_q^+$, e considerar a aplicação $\lambda \mapsto \theta \circ \lambda,\ \lambda \in \mathfrak{n}^*$.

Para cada órbita coadjunta Ω, consideramos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \chi_\Omega &: G \to \mathbb{C} \\ \exp(a) &\mapsto |\Omega|^{-1/2} \sum_{\lambda \in \Omega} \theta(\lambda(a)) \end{aligned} \tag{7.3}$$

De acordo com as observações anteriores, podemos verificar que $\{\chi_\Omega\}$ é uma base ortonormada do espaço unitário das funções de classe de G relativamente ao produto hermítico usual

$$< \chi, \psi >_G := \sum_{g \in G} \chi(g)\, \overline{\psi(g)} \tag{7.4}$$

O principal objectivo do método das órbitas consiste no estudo das condições sob as quais cada carácter irredutível de G é da forma χ_Ω como em (3.3) (note-se que a irredutibilidade resulta imediatamente do facto de cada χ_Ω ser um vector unitário relativamente ao produto (3.4), como observámos anteriormente). Mais que isto, o método estabelece uma bijecção entre $\mathrm{Irr}(G)$ e as órbitas coadjuntas de G em $\mathfrak{n}^*$. Nestas condições, é costume dizer-se que os caracteres irredutíveis de G são *descritos pelo método das órbitas.*

No nosso caso, é sabido que os caracteres de $\mathrm{Irr}(G)$ podem ser descritos pelo método das órbitas (ver, por exemplo, [9] e [23]) pelo que não vamos discutir os aspectos técnicos desta construção. Pela nossa discussão anterior, a validade do método das órbitas implica que (3.3) fornece uma fórmula para os caracteres irredutíveis de G, e é nela que estaremos interessados. Referimos este facto como uma proposição.

Proposição 7.1.1. *Seja $\chi \in Irr(G)$. Então $\chi = \chi_\Omega$ para uma única órbita coadjunta em $\mathfrak{n}^*$, tal que*

$$\chi_\Omega(exp(a)) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\lambda \in \Omega} \theta(\lambda(a)),\ a \in \mathfrak{n}^*$$

De facto, a Proposição 7.1.1, bem como toda a nossa discussão anterior, é válida para qualquer $\mathbb{F}_q-$álgebra associativa nilpotente [23]. No entanto, estaremos apenas interessados em aplicar este método a subálgebras de $\mathfrak{u}(n, q)$, como resultará da construção dos CGGG.

7.2 Caracteres de Gelfand-Graev generalizados

Estamos finalmente em condições de definir uma família de caracteres de $GL(n,q)$ quando car $\mathbb{F}_q > 2n$. Suporemos esta condição ao longo da nossa discussão. Para facilitar alguma da notação, definimos $G := GL(n,q)$.

Relembremos que o nosso objectivo final não é mais do que apresentar uma família de caracteres de $GL(n,q)$, parametrizada pelas classes nilpotentes de $\mathfrak{gl}(n,q)$. Com efeito, seja $X \in \mathfrak{gl}(n,q)$ uma matriz nilpotente. Tome-se o fecho algébrico K de $\mathbb{F}_q$. Seja $\mathfrak{p}_X$ a subálgebra de Jacobson-Morozov associada a X. De acordo com a Proposição 6.2.2, X é semelhante (em $\mathfrak{gl}(n,K)$) a uma matriz $X' \in \mathfrak{n}_\lambda$ para alguma composição $\lambda \vDash n$, onde $\mathfrak{n}_\lambda$ é o nilradical de $\mathfrak{p}_\lambda$. Fixemos uma matriz X' nestas condições. Mas X e X' são semelhantes em $\mathfrak{gl}(n,q)$ pela Proposição 4.3.2. Donde $X' \in n_\lambda := \mathfrak{n}_\lambda^F$. Note-se que $\mathfrak{n}_\lambda$ é o nilradical da subálgebra parabólica standard $\mathfrak{p}_\lambda$, e portanto n_λ corresponde à subálgebra $F-$estável das matrizes de $\mathfrak{n}_\lambda$ com entradas em $\mathbb{F}_q$ (cf. Observação 4.1.1). Em particular, n_λ é uma $\mathbb{F}_q-$álgebra associativa nilpotente. O conjunto $\mathfrak{B}_\lambda$ dos elementos da base canónica de $\mathfrak{gl}(n,q)$ que pertencem a n_λ forma uma base desta mesma. Fixando a sua base dual $\mathfrak{B}_\lambda^* = \{E_{i,j}^*\}$ (onde $E_{i,j}^*(E_{k,l}) := \delta_{ik}\delta_{jl}$), tomamos a imagem dual de X' pelo isomorfismo

$$f : n_\lambda \to n_\lambda^*(n,q)\ , \quad E_{i,j} \mapsto E_{i,j}^* \tag{7.5}$$

Seja $\Omega \subset n_\lambda^*$ a órbita coadjunta de $f(X)$. Atendendo à discussão feita na secção 7.1, escolhemos o (único) carácter irredutível χ_Ω do grupo finito $u_\lambda := \exp(n_\lambda)$. Finalmente, induzimos este carácter a G

$$\Gamma_X := \mathrm{ind}_{u_\lambda}^G \chi_\Omega \tag{7.6}$$

O nosso trabalho mostra que este carácter não depende da classe de semelhança de c_λ. As relações de conjugação mostram ainda, através da fórmula de indução (cf. Proposição 1.2.1), que (7.2) induz o mesmo carácter qualquer que seja $X \in c_\lambda$.

7.3 Observações e Comentários Finais: Para onde ir

- Embora a determinação de λ' tenha ficado comprometida (cf. Observação 6.2.5), ela pode ser facilmente calculada nos dois casos extremos. Em particular, $(n)' = (1, \cdots, 1)$ e neste caso estaremos a induzir um carácter linear não degenerado do grupo unitriangular $u_{(1,\cdots,1)} = U$ (c.f Observação 1.2.2), pelo que obtemos o carácter de Gelfand-Graev já estudado na capítulo 2 (onde vimos que a escolha de carácter linear não degenerado de U não afecta a indução, pois estes são todos conjugados entre si pela acção de T). Dito de outro modo, estamos a associar o carácter de Gelfand-Graev à classe de semelhança da matriz nilpotente correspondente a um único bloco de Jordan. No outro caso extremo, associamos a classe nula (correspondente à partição $(1, \cdots, 1)$) ao carácter do grupo trivial $u_{(n)} = \{I_n\}$, cuja indução resulta no carácter regular de $GL(n, q)$;

- A aplicação sugerida na Observação 6.2.5 parece já ter sido estudada com mais detalhe num artigo recente [26]. Além disso, o mesmo artigo realça a natureza combinatorial desta construção, onde em particular é referido que os CGGG de $GL(n, q)$ resultam da indução de supercaracteres provenientes de uma teoria de supercaracteres do grupo unitriangular $U(n, q)$ baseada nos trabalhos de C. André [9];

- Pela sua construção, é esperado que esta família de caracteres permita o estudo de quase todos os caracteres irredutíveis de $GL(n, q)$ (embora estes caracteres já tenham sido descritos por Green [10]. Recordemos no entanto que o presente trabalho é uma particularização da construção originalmente proposta por Kawanaka ([12] e [3]) para grupos finitos do tipo Lie (a referência ao morfismo de Frobenius na secção 4 está intimamente ligada a este aspecto). Portanto, é esperado que, no seguimento das ideias de Kawanaka, se consiga obter informação sobre quase, senão mesmo, todos os caracteres irredutíveis destes grupos. Por exemplo, em [27] estudam-se os CGGG do grupo unitário das matrizes 3×3 com entradas sobre $\mathbb{F}_q$, com vista cálculo de bases para certas álgebras de Hecke (cuja relevância no estudo das multiplicidades dos caracteres irredutíveis de um grupo finito como se sabe é enorme). No caso deste último grupo, a versão modificada da nossa construção fornece (à semelhança de $GL(3, q)$) três CGGG, dos quais figuram a representação regular e a representação de Gelfand-Graev Γ (que aqui falamos num sentido mais geral do que aquele que foi referido para $GL(n, q)$). Em [27], estuda-se uma base da álgebra de Hecke associada a um carácter (linear) de onde se procede a indução que resulta no terceiro carácter de Gelfand-Graev generalizado $\Gamma_{1.5}$. A tabela I do mesmo artigo (pág. 48) mostra as multiplicidades dos caracteres irredutíveis na decomposição de Γ e $\Gamma_{1.5}$, onde em particular notamos que os caracteres irredutíveis que surgem com multiplicidade 1 na decomposição de $\Gamma_{1.5}$ são precisamente aqueles que não surgem na decomposição de Γ. Assim, o terceiro carácter de Gelfand-Graev generalizado acaba por "complementar"a informação fornecida pelo carácter de Gelfand-Graev neste caso. Motivados por esta discussão, acreditamos ser possível fazer um estudo análogo para $GL(3, q)$, uma vez mais como modo de ilustrar a vantagem de se definirem estes caracteres.

Bibliografia

[1] F. R. Dias Agudo, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica - 4^a edição*, Escolar Editora, 1996

[2] J. A. Green, *Discrete series characters for $GL(n,q)$*, Algebras and Representation Theory, 02 (1999), pp. 61-82

[3] N. Kawanaka, *Shintani Lifting and Gelfand-Graev Representations*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 47 (1987), pp. 147-163

[4] O. J. Brison, *Grupos e Representações*, Textos de Matemática, Departamento de Matemática, 12, Departamento de Matemática FCUL, 1999

[5] I. M. Gelfand, M. I. Graev, *Construction of irreducible representations of simple algebraic groups over a finite field*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 147 (1962)

[6] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters*, John Wiley and Sons Inc, 1993

[7] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, John Wiley and Sons Inc, 1962

[8] F. Digne, J.Michel, *Representations of finite groups of Lie type*, Cambridge University Press, 1991

[9] C. A. M. André, *Basic characters of the Unitriangular Group*, Journal of Algebra, 175 (1995), pp. 287 - 319

[10] J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 80 (1955), pp. 402 - 447

[11] P. Deligne, G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Math., 103 (1976), pp. 103 - 161

[12] N. Kawanaka, *Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality*, Algebraic Groups and Related Topics Advanced Studies in Pure Math. vol. 6, 1985, pp. 175 - 206

[13] T. A. Springer, R. Steinberg, *Conjugacy Classes*, Seminar on Algebraic Groups and Related Topics, Lecture Notes in Math., Part E, vol. 131, 1970

[14] D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993

[15] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, VII - IX, Elements of Mathematics, Springer, 2005

[16] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, I - III, Elements of Mathematics, Springer, 1989

[17] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, VII - IX, Elements of Mathematics, Springer, 2002

[18] P. J. Cameron, *Matrix Groups*, Handbook of Linear Algebra (ed. L. Hobgen) cap. 67, Chapman and Hall/CRC, 2006

[19] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley Groups*, Yale University, 1967

[20] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 1997

[21] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1973

[22] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York, 1962

[23] J. Sangroniz, *Irreducible characters of large degree of Sylow p-subgroups of classical groups*, J. Algebra, 321 (2009), pp. 1480 - 1496

[24] D. Kazhdan, *Proof of Springer's Hypothesis*, ISrael J. Math., 28 (1977), pp. 111 - 245

[25] E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 6 (1957), pp. 111 - 245

[26] S. Andrews, N. Thiem, *The combinatorics of* GL_n *generalized Gelfand-Graev characters*, arXiv:1505.00763v1 [math.RT]

[27] J. G. Rainbolt, *The generalized Gelfand-Graev Representations of* $U(3, q)$, Journal of Algebra, 202 (1998) pp. 44 - 71