

# Explorar e Investigar em Matemática: Desafio para Alunos e Professores<sup>1</sup>

João Pedro da Ponte

[jponte@fc.ul.pt](mailto:jponte@fc.ul.pt)

*Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*

**Resumo.** Este artigo analisa as relações entre pesquisar, ensinar e aprender no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e na actividade profissional do professor. Dá também atenção especial ao conceito de tarefa, considerando o papel dos exercícios, problemas, investigações, explorações e do trabalho de projecto no ensino desta disciplina. Recorrendo a exemplos de actividades realizadas por professores de Matemática portugueses, analisa a actividade de aprendizagem suscitada por tarefas de exploração/investigação e discute as respectivas potencialidades. Finalmente, refere as condições ao nível da cultura profissional dos professores, com relevo para a colaboração e a dimensão associativa, que podem favorecer uma actividade de pesquisa sobre a sua própria profissional.

**Abstract.** This paper analyses the relationships among researching, teaching and learning in mathematics teaching and learning and in the teacher's professional practice. It also pays attention to the concept of task, taking into account the role of exercises, problems, investigations, explorations and project work in the teaching of this discipline. Using examples from activities carried out by Portuguese mathematics teachers, it analyses the learning activity that was promoted by exploration/investigation activities and discusses their potential. Finally, it refers the conditions regarding the teachers' professional culture, notably collaboration and associativism, that favour the activity of researching his/her own professional practice.

**Palavras-chave.** Ensino, Aprendizagem, Tarefa, Investigação, Resolução de problemas, Cultura profissional, Colaboração.

Tradicionalmente, ensinar e investigar ou pesquisar são vistos como actividades distintas. O que o “pesquisador” descobre ou inventa, o professor, noutro tempo e noutro contexto, ensina aos seus alunos. Esta separação entre pesquisar e ensinar tem vindo a ser questionada, do mesmo modo que se tem vindo a pôr em causa a existência de uma separação total entre pesquisar e aprender. Afinal, quem pesquisa está a procurar aprender e quem aprende tem muitas vezes interesse em pesquisar. Deste modo, proponho-me revisitar os conceitos de pesquisar, ensinar e aprender, analisando como se podem interligar no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e na actividade profissional do professor desta disciplina e ilustrando com exemplos de actividades e projectos da educação matemática portuguesa.

---

<sup>1</sup> Este artigo baseia-se numa palestra proferida no IV Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro, realizado em 1-3 de Setembro, em Macaé.

## **Pesquisar, ensinar e aprender**

**Pesquisar.** Existem muitas perspectivas sobre o que é pesquisar ou investigar. Tal como acontece com muitas outras palavras, “pesquisar” pode assumir múltiplos significados. Em muitas áreas do saber, constituíram-se poderosas comunidades académicas que reivindicam para si um estatuto especial e que de algum modo se apropriaram deste termo como se tivessem o seu exclusivo. Geram-se então diversos mitos:

- Pesquisar é uma actividade transcendente, que envolve o uso de metodologias sofisticadas, requer recursos especiais e uma longa preparação prévia.
- Pesquisar é uma actividade reservada a um grupo especial de pessoas, os “pesquisadores profissionais”.
- Ensinar e pesquisar são duas actividades contraditórias, que não se conseguem fazer em simultâneo sem comprometer a qualidade de uma, de outra, ou das duas.

Existe certamente a “grande pesquisa”, que se realiza nas universidades, empresas e laboratórios. No entanto, é redutor afirmar que, pelo simples facto dessa pesquisa existir, ser legítima e ser útil, mais nenhuma pode existir. Ao lado dessa “grande pesquisa” podem e devem existir outras formas de indagação, feitas pelos mais diversos actores sociais. Na verdade, “pesquisar” não é mais do que procurar compreender de modo aprofundado, procurar encontrar soluções adequadas para os problemas com que nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos, que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.

As actividades de pesquisar e ensinar não são necessariamente contraditórias. Eu próprio tenho retirado muitos benefícios para a minha actividade de pesquisa do contacto com os meus alunos, pelo desafio que eles colocam às minhas ideias e argumentos e pelas perguntas pertinentes que frequentemente obrigam a repensar os problemas. De modo semelhante, penso que a minha actividade como docente tem beneficiado fortemente do que tenho aprendido como pesquisador. Aliás, existem exemplos clássicos na história da ciência de influências mútuas entre os papéis de professor e pesquisador. Um deles, por exemplo, diz respeito a Lobachevsky. Foi o seu trabalho como professor de Geometria que o levou a olhar de modo mais atento para o

V Postulado de Euclides e a procurar formas sugestivas de o explicar aos seus alunos. Esse postulado desde há muito incomodava os matemáticos, por diversas razões, e muitos deles interrogavam-se se não seria possível deduzi-lo dos restantes. Foi também isso que tentou fazer Lobachevsky e, quando se convenceu da impossibilidade dessa dedução, resolveu experimentar as consequências de assumir um postulado alternativo, concluindo pela possibilidade da existência de Geometrias não euclidianas. Algo de semelhante aconteceu com o químico Mendeliev, que teve a ideia de construir uma tabela para melhor explicar as propriedades dos elementos então conhecidos aos seus alunos. A tabela periódica viria a ser um dos pilares fundamentais da Química moderna, levando à descoberta de novos elementos e novas propriedades e sugerindo muitas pistas para a compreensão da estrutura da matéria.

**Aprender.** Do mesmo modo, existem muitos significados para o termo “aprender” e muitas visões sobre como se aprende. Na visão dos saudosistas da escola do passado, aprender é sobretudo adquirir conhecimentos, quer factuais – a tabuada, as definições, o enunciado das regras e dos teoremas, etc., – quer processuais – por exemplo, como efectuar um cálculo numérico ou algébrico, como determinar uma derivada ou um integral. Para outros, a aprendizagem é um fenómeno natural, que acontece constantemente no nosso dia-a-dia, uma vez que todos aprendemos a falar, todos aprendemos as regras básicas do comportamento social, etc. Não faltam as visões limitadas, que salientam um ou outro aspecto desse processo multifacetado e complexo que é aprender, apresentando uma perspectiva parcial e limitada. Na verdade, o que está em causa na aprendizagem escolar da Matemática é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocinar e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações muito diversas, de modo crítico e reflexivo.

**Ensinar.** Finalmente, existem muitas acepções do que é ensinar e do que é ser professor. Para muitos, será sobretudo apresentar a matéria, em frente do quadro ou, de modo mais sofisticado, com retroprojector ou PowerPoint. Nesta perspectiva, ensinar e aprender são independentes – o professor pode ensinar sem que os alunos aprendam. Mas também se pode assumir a perspectiva oposta – se os alunos não aprenderam, é porque o professor não ensinou. Falou, gesticulou, escreveu no quadro, possivelmente esforçou-se, mas falhou na sua função. Se partirmos do princípio que o professor existe

para que os alunos aprendam e se estes não aprenderam, então ele não ensinou. Nesta perspectiva, ensinar é algo bastante mais complexo do que apenas transmitir conhecimentos e a função fundamental do professor, por onde é preciso avaliar os resultados do seu trabalho, é a promoção da aprendizagem dos seus alunos.

### Diferentes tipos de tarefas

O ensino-aprendizagem da Matemática assenta na actividade que os alunos levam a cabo na sala de aula e esta, por sua vez, depende muito das tarefas apresentadas pelo professor. A disciplina de Matemática tem as suas tarefas características, sendo o exercício<sup>2</sup> a mais conhecida de todas. No entanto, há outros tipos de tarefa, como os problemas e as pesquisas. Por vezes também se fala em tarefas de modelação e projectos. É de notar que as características de uma tarefa não são absolutas mas relativas à pessoa que a realiza. Assim, uma mesma questão pode constituir para uma pessoa um problema e para outra um exercício, etc.

Uma tarefa tem quatro dimensões fundamentais: O grau de complexidade, a estrutura, o contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos quatro tipos básicos de tarefa, como mostra a Figura 1.

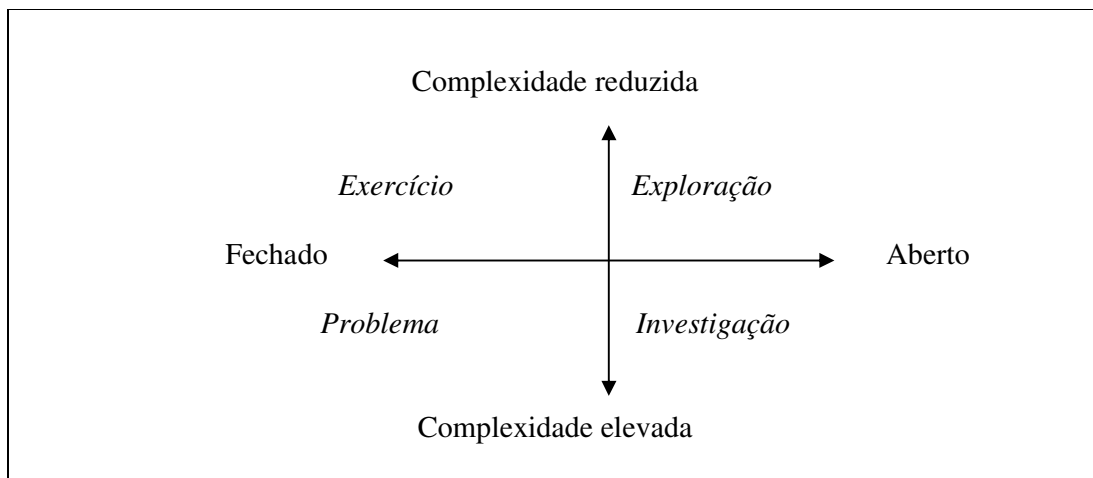


Figura 1 – Diversos tipos de tarefas, segundo a complexidade e a abertura.

---

<sup>2</sup> Note-se que não é só em Matemática que se fazem exercícios. Há exercícios em todas as disciplinas, das línguas à Educação Física, passando pelas ciências como a Física e a Química, e até nas artes como a Música, a Dança e o Teatro.

Observando este esquema, concluímos que: os *exercícios* são tarefas sem grande complexidade e estrutura fechada; os *problemas* são tarefas também fechadas e com elevada complexidade; as *investigações* têm um grau de complexidade elevado e uma estrutura aberta; e, finalmente, as *tarefas de exploração* são também abertas mas relativamente pouco complexas.

Muitas vezes não se distingue entre tarefas de pesquisa e de exploração, chamando-se “investigações” ou “pesquisas” a todas elas. Isso acontece, muito provavelmente, porque é difícil saber à partida qual o grau de complexidade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. No entanto, dada a importância desta característica das tarefas, é preferível termos uma designação para as tarefas abertas menos complexas (explorações) e outra designação para as mais complexas (investigações).

Um *projecto*, no fundo, não é mais do que uma tarefa de investigação com um carácter relativamente prolongado. De facto, uma pesquisa chama-se muitas vezes “projecto de investigação” e pode demorar anos a concluir. Outras pesquisas demoram um tempo relativamente curto, podendo realizar-se numa aula ou numa curta sequência de aulas. Tanto o projecto como a pesquisa comportam um carácter aberto – uma vez definida a ideia central, a concretização do objectivo requer ainda muito trabalho – e têm um grau de dificuldade considerável na procura da metodologia de trabalho, na superação das dificuldades, na organização do material recolhido, em tirar conclusões, etc. O projecto, de resto, é um excelente exemplo de uma tarefa de longa duração enquanto que as actividades de natureza estruturada, por via de regra, são para resolver num prazo relativamente curto. Deste modo, a dimensão tempo assume também um papel chave na caracterização das tarefas.

A outra dimensão das tarefas diz respeito ao contexto referencial: a tarefa pode ser contextualizada numa *situação da realidade* ou formulada em termos *puramente matemáticos*. Skovsmose (2000) indica ainda um terceiro tipo de situações, a que chama de “*semi-realidade*”, que à primeira vista parecem reais mas que, na prática, são abstractas, pois nelas não há que atender às propriedades dos objectos excepto aquelas que o contrato didáctico indica serem relevantes para a respectiva resolução. As tarefas formuladas em termos de realidade ou semi-realidade que aparecem no ensino da Matemática constituem exercícios, problemas, explorações e pesquisas, dependendo do seu grau de complexidade e da sua abertura.

Muitos trabalhos têm sido feitos em Portugal dando atenção ao processo de pesquisa em Matemática. Temos hoje já uma noção bastante clara do papel dos problemas, das diversas fases de um processo típico de pesquisa, da formulação de questões até à produção, teste e refinamento de conjecturas, e daí às tentativas de prova e ao processo de divulgação de resultados (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Temos também uma boa noção do papel dos aspectos conscientes e inconscientes desse processo e da sensibilidade estética e sabemos que existem diferentes estilos cognitivos, ou seja diferentes modos de pensar e de criar em Matemática (Burton, 2001; Davis & Hersh, 1995; Hadamard, 1945; Oliveira, 2002; Poincaré, 1996).

É de notar que as tarefas, embora sejam importantes, não determinam por si só o que acontece na sala de aula. Uma mesma tarefa pode dar origem a situações de aprendizagem muito diversas, dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula. Trata-se de questões que vamos analisar a partir de exemplos.

### **Momentos de trabalho exploratório e de pesquisa na sala de aula**

*Exemplo 1 – Uma investigação sobre dízimas.* Uma tarefa de investigação respeitante ao estudo das fracções por alunos do 6.º ano encontra-se no trabalho da professora Isabel Paula (2005). A professora usou tarefas de diversos tipos e materiais como o geoplano. Os alunos usavam habitualmente a calculadora, inclusive nos testes.

Uma das melhores alunas da turma é Marta, a delegada dos alunos. Esta aluna escreveu num dos trabalhos que colocou no seu portefólio individual:

Desta vez segui o conselho da professora e fui analisar uma ficha feita na aula, a ficha das dízimas. Achei engraçado o que tínhamos visto com o denominador 7 e pensei se seria por ser ímpar. Fui ver com os denominadores 5 e 9 e neste achei resultados engraçados.

Uma vez que a aluna nada tinha registado, a professora solicitou-lhe que explicasse melhor o que tinha visto. Deu alguns exemplos das suas observações, mas muito resumidos. A professora resolveu então propor à turma que pensasse melhor na tarefa de Marta, como trabalho de casa.

Na aula seguinte, poucos alunos apresentaram o trabalho feito, ao contrário de Marta que trazia os dados perfeitamente organizados com numeradores de 1 a 60, que enchiam numa página A4, e ainda a descrição das suas observações num relatório, onde corrigia aspectos que inicialmente tinha escrito na primeira versão. Assinalou os casos que possibilitavam obter números inteiros, observou a regularidade existente entre o período da dízima e o numerador da fracção. Nesse documento, ela demonstrou toda a sua satisfação pela sua descoberta.

É curioso notar o que para esta aluna de 11 anos está perfeitamente claro o que é fazer uma investigação. Atente-se na forma como ela comenta as ideias de um colega:

Jorge – Uma investigação é um problema, que se pode resolver de muitas maneiras, parte-se de uma pergunta, há várias respostas que se comentam, quase sempre há uma regra no fim.

Marta – Não é bem isso, partes de um problema, mas és tu que vais lá por ti. Um problema tem quase sempre só uma solução. Na investigação fazes o que achas, num caminho para encontrares uma resposta, que é a tua.

Marta apercebe-se da diferença entre problema e investigação, salientando nesta o processo e não o resultado. A professora aproveitou o diálogo anterior para discutir com a turma quais teriam sido as tarefas anteriormente propostas que poderiam ser designadas por problemas ou investigações, facto que antes disso nunca tinha sido discutido em pormenor.

**Exemplo 2 – Como fazer ampliações?** O exemplo seguinte refere-se a uma experiência realizada com alunos do 8.º ano pelo professor João Almiro (2005). A tarefa proposta está indicada na figura 2.

Trata-se de um problema, no qual os alunos podiam usar estratégias de cunho exploratório. O grande interesse do professor era perceber o que é que os alunos eram capazes de fazer sem o seu auxílio. Preparou a sala com quatro retroprojectores, um para cada dois grupos, e distribuiu uma fita métrica e uma régua para cada grupo. A sala era um tanto apertada para os retroprojectores, mas conseguia-se trabalhar. Não deu instruções nenhuma, disse somente que tinha sido a professora de Educação Visual que lhe tinha pedido para colocar aquele problema. Claro que muitos dos alunos não acreditaram.

A professora de Educação Visual quer fazer a ampliação para papel de cenário da aguarela que se encontra em baixo, mas colocou a seguinte condição: a área da figura ampliada tem de ser 400 vezes maior do que a área desta. A professora vai fazer um acetato com a aguarela e projectá-lo, usando um retroprojector, no papel de cenário que irá pendurar numa parede. Mas tem um grande problema: A que distância é que deve colocar o retroprojector da parede? Como é que podemos ajudá-la?

Elabora um relatório que inclua a descrição das tuas pesquisas, os cálculos que efectuaste, as tuas conjecturas e possíveis soluções para entregarmos à professora.



(M. C. Escher, 1965)

Figura 2 – Um problema de ampliação.

As reacções dos grupos foram diversas. Alguns ficaram completamente perdidos sem saber o que fazer, outros agarraram na tarefa e começaram a tentar encontrar caminhos. No questionário final um aluno referiu: “Senti algumas dificuldades com os retroprojectores, pois no início não sabíamos por onde começar”. Contudo, o professor verificou com satisfação que todos os grupos perceberam que o rectângulo projectado teria que ter a largura e o comprimento 20 vezes maiores que o inicial, para que a área fosse 400 vezes maior. Os alunos já tinham resolvido vários problemas parecidos e foram capazes de mobilizar os seus conhecimentos.

A grande dificuldade dos alunos era perceber a que distância deviam colocar o retroprojector da parede para que o comprimento dos segmentos da figura aumentasse 20 vezes. Quase todos os grupos recortaram um rectângulo com as dimensões da aguarela da tarefa. Projectavam, mediam o que encontravam e depois viam quantas vezes é que o comprimento e a largura tinham aumentado. Rapidamente se aperceberam que não tinham espaço na sala para aumentar as dimensões 20 vezes, pelo que tinham que fazer cálculos para saber a que distância deviam colocar o retroprojector da parede.



Houve um grupo cujo trabalho o professor considerou espectacular. O grupo percebeu que havia proporcionalidade directa entre a distância do retroprojector à parede e o número de vezes que as dimensões eram ampliadas e rapidamente resolveu o problema. Outros quatro grupos, entreajudando-se muito, foram medindo e discutindo e quando um chegava a uma conclusão trocava logo com os outros. A pouco e pouco foram avançando, por vezes com conjecturas interessantes que os outros grupos refutavam e provavam que não estavam certas. Seguindo os seus caminhos, foram chegando a soluções que o professor considerou aceitáveis. Um dos grupos que melhor trabalhou no decorrer desta aula entregou a resolução indicada na figura 3.

1º passo → Calculamos a área da aquarela que está na parede

$$A_{\text{do } \square} = 11,2 \times 7,9 = 88,48 \text{ cm}^2$$

2º passo → Calculamos a área do retângulo maior

$$A_{\text{do } \square} = 88,48 \text{ cm}^2 \times 400 = 35392 \text{ cm}^2$$

3º passo → Calculamos a raiz quadrada (x.s)

$$\sqrt{(A_{\text{do } \square} : A_{\text{do } \square})} = \sqrt{(35392 : 88,48)} = \sqrt{400} = 20$$

4º passo → Fazemos medições da distância ao quadro, para formarmos uma proporcionalidade directa

1 m de distância (d) do retroprojector (r) →  $\overline{AC} = 44,5$   
 2 m de (A) de (B) →  $\overline{AC} = 88,48$

$x \text{ m} = d$  do retroprojector →  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{224 \text{ cm}}{44,5 \text{ cm}}$   
 $1 \text{ m} = 11,11$  →  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{224 \text{ cm}}{44,5 \text{ cm}}$

$44,5 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ m}$   
 $224 \text{ cm} \rightarrow x$

$$x = \frac{224 \times 1}{44,5}$$

$$x \approx 5 \text{ m}$$

Figura 3 – Resolução dos alunos do problema da ampliação.

Os outros três grupos não conseguiram avançar quase nada sozinhos. Um deles apresentou imensas dificuldades, não fazendo nada sem uma ajuda constante. Os outros dois grupos, foram uma grande desilusão para o professor que achou que “brincaram muito e produziram pouco”.

Alguns dos alunos (cerca de 1/5) não gostaram destas aulas. Um deles escreveu no questionário: “Eu não gostei destas aulas, prefiro aulas normais a fazer exercícios, acho que aprendo muito mais nas aulas a fazer exercícios e a tirar dúvidas”. No entanto, a

maioria dos alunos manifestou satisfação e reconheceu ter feito aprendizagens significativas. É o que nos diz este aluno:

Os problemas são um bocadinho mais complicados do que os das outras aulas, pelo menos o do retroprojector, em que tínhamos que pensar um bocado, desenvolver, tínhamos que pensar métodos diferentes, para conseguir o método ideal para ter o resultado certo. Tínhamos que descobrir o que era para fazer primeiro. Nos manuais, as perguntas estão directas, dizem logo o que temos que fazer.

**Exemplo 3 – Investigando a função polinomial.** O exemplo seguinte diz respeito a uma tarefa de exploração das propriedades das funções polinomiais. Trata-se de um trabalho realizado por duas professoras, Alexandra Rocha e Cristina Fonseca (2005), numa turma do 10.º ano. A tarefa foi proposta depois do estudo das funções módulo e quadrática.

Durante algum tempo, os alunos estudaram as situações apresentadas na tarefa, que remetia para a exploração das propriedades da função  $y = ax^3$  recorrendo à calculadora gráfica. Dada a sua experiência anterior neste tipo de tarefas, a exploração decorreu de forma sistemática: atribuíram valores positivos a  $a$  e registaram o comportamento da função, tendo utilizado o mesmo procedimento para valores negativos de  $a$ .

Os alunos formularam conjecturas a partir da variação dos parâmetros das famílias de funções polinomiais de grau 3:

- É simétrico! Estes valores passam para aqui e estes para aqui. [referindo-se à simetria das funções  $y = ax^3$  e  $y = -ax^3$  relativamente ao eixo dos  $yy$ ];
- À medida que  $a$  aumenta, o gráfico afasta-se do eixo dos  $xx$  e aproxima-se do eixo dos  $yy$  [referindo-se ao comportamento da função  $y = ax^3$ ];
- Na parte positiva do domínio, esta função [ $y = x^3$ ] é dada por  $y = 1,5x^2$  e na parte negativa do seu domínio é dada por  $y = -1,5x^2$  [o aluno compara o aspecto gráfico das três funções];
- A função  $y = x^3$  passa na origem do referencial.

Alguns grupos, depois de terem identificado as propriedades mais simples das famílias das funções polinomiais, foram à procura de novos desafios, transformando a sua actividade numa verdadeira investigação. Perguntaram por exemplo:

- Qual é o comportamento das funções polinomiais do tipo  $y = x^n$ , sendo  $n \geq 4$ ?
- Os pontos de intersecção das funções afim e quadrática pertencem ao gráfico da função produto das duas funções?
- A função polinomial de grau 3 passa pelos pontos onde as funções afim e quadrática intersectam o eixo dos  $xx$ ?
- Que relação existe entre o sinal das funções quadrática e afim e o sinal da função polinomial de grau 3 (produto das anteriores)?
- Como determinar analiticamente os extremos relativos de uma função polinomial de grau 3?

Os alunos de um grupo, depois de terem atribuído o valor 2 a todos os parâmetros da função quadrática  $g$  e afim  $h$ , observaram que a função polinomial de grau 3 produto daquelas duas “passa nos pontos onde as funções  $g$  e  $h$  se cruzam”. Para validar a sua conjectura, os alunos testam outros casos, atribuindo diferentes valores a cada um dos parâmetros,  $g(x) = 2x^2 + 3x$  e  $h(x) = 4x + 5$ . Ao passar perto do grupo, a professora Cristina viu o ar de descontentamento dos alunos e questionou-os:

Cristina – Qual era a vossa ideia?

Ricardo – Demos o mesmo valor a todos [os parâmetros]. Depois introduzimos [na calculadora gráfica] as três funções e vimos que a função [polinomial de grau 3] passava nos pontos onde intersectavam as outras duas. Agora mudámos os valores, mas já não dá!

Recorrendo à calculadora gráfica, os alunos mostram os exemplos estudados. Para que reflectissem sobre a informação que dispunham, a professora sugeriu que determinassem os pontos de intersecção das funções, tirando partido das potencialidades da calculadora. Dito isto, a professora saiu do grupo e os alunos, depois de novas explorações, refinaram a sua conjectura:

Ricardo – Já sei! A função [polinomial de grau 3] passa pelos pontos onde as outras funções [quadrática e afim] intersectam o eixo dos  $xx$ .

Patrícia – Diz lá!?

Ricardo – Espera! Eu não tenho a certeza!

Para validarem esta conjectura, os alunos determinaram analiticamente os zeros das três funções, concluindo que os zeros da função polinomial de grau 3 são os zeros das funções quadrática e afim que lhe corresponde. Na sequência, procuraram explorar outras relações entre as três funções, como, por exemplo, o sinal e os extremos relativos.

Após a realização da tarefa, seguiu-se a respectiva discussão final com toda a turma. Esta discussão conduziu a novos aprofundamentos, levando por vezes à formulação de novos problemas e novas conjecturas e valorizando a justificação/prova. A dinâmica da discussão – que envolveu dois processos principais, o confronto e a defesa – levou os alunos a comparar as suas ideias com as dos outros, a apropriaram-se destas ideias e a colocar questões pertinentes, reveladoras de uma compreensão significativa do tema.

### **Possibilidades e limites das tarefas de exploração e investigação**

Uma preocupação fundamental que se destaca nos exemplos anteriores é a de dar ao aluno a responsabilidade de descobrir e justificar as suas descobertas. Como diz Burton (1984), ao sintetizar as orientações de um projecto que dirigiu centrado na resolução de problemas e na realização de pesquisas matemáticas:

Foi pedido [aos professores] que mudassem o seu papel de responsáveis pelo que os alunos fazem e aprendem para o papel de recurso dos alunos. Os professores foram encorajados a não fornecer as respostas ou os métodos mas sim a provocar os seus alunos a procurá-las por si próprios. A noção de responsabilidade era uma noção-chave – os alunos tomando responsabilidade pela sua escolha dos problemas, dos seus colegas de trabalho e o seu método de ataque, pelo seu pensamento e pelos seus resultados. (p. 1)

Na verdade, se se pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, então as tarefas de exploração e pesquisa têm de ter um papel importante na sala de aula.

O interesse destas tarefas é por vezes desvalorizado com diversos argumentos. Um deles é que a maior parte dos alunos não tem qualquer interesse por realizar explorações ou pesquisas matemática. É verdade que muitos alunos, infelizmente, não

têm qualquer interesse pelas pesquisas matemáticas, ou porque não têm interesse pela escola, ou porque têm esse interesse canalizado para outros objectivos – por exemplo, fazer exercícios em série como preparação para o exame. No entanto, há sempre uma pergunta, uma observação, um desafio que o professor pode colocar para captar a sua atenção:. Assumir o contrário é dizer que há alunos que são incapazes de aprender.

Outra crítica é que os alunos têm dificuldade em perceber como pesquisar. É verdade que eles, à partida, não sabem o que é uma pesquisa, mas podem aprender. Os alunos podem precisar de várias experiências em trabalho investigativo para perceberem, de modo apropriado, em que consiste. No entanto, a função do professor é ensinar, não é reclamar que os alunos não sabem.

Outra crítica, ainda, é que antes de poderem pesquisar os alunos têm de aprender muitos conceitos e procedimentos básicos. Ora, saber conceitos e procedimentos básicos ajuda certamente na realização de pesquisas, como em todo o trabalho intelectual. No entanto, muitos deles aprendem-se melhor em actividades exploratórias e investigativas, lutando com dificuldades concretas, do que de uma forma abstracta e descontextualizada. Muitos conceitos e procedimentos podem ser aprendidos. Por isso, não tem de ser “primeiro coisa e depois a outra”. Pode ser, “umas vezes primeiro uma coisa, outras vezes primeiro a outra” ou ainda, por vezes, “as duas coisas ao mesmo tempo”.

O quarto argumento crítico é que as actividades do aluno e do matemático são necessariamente muito diferentes, porque não se pode comparar um profissional especializado, que trabalha em coisas que lhe interessam, com uma criança ou um jovem, que tem uma dúzia de disciplinas para estudar, coagido pelo sistema de ensino. Que o matemático e o aluno são personagens diferentes, não há qualquer dúvida. No entanto, a sua actividade pode ter muitos pontos de contacto. São vários os matemáticos que o dizem, como o francês Hadamard: “Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de geometria ou de álgebra e o trabalho de criação, pode dizer-se que existe apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante” (1945, p. 104).

### **Aprendizagens profissionais nas diversas experiências**

Mostrei algumas situações que ocorreram na sala de aula durante a realização de diversas tarefas que, por uma razão ou por outra, assumem um carácter de pesquisa. Estas situações desenvolveram-se a partir de tarefas diferenciadas –um problema e duas tarefas de exploração/investigação. Em todos os casos se registaram aprendizagens importantes por parte dos alunos. Em todos os casos houve também problemas com que os professores tiveram de lidar e que nem sempre conseguiram resolver totalmente. Isabel Paula (2005) evidencia a sua satisfação pelo trabalho de Marta, uma das suas alunas, mas refere que são poucos os alunos que se envolvem de modo semelhante no trabalho em Matemática. João Almiro (2005) gostou muito do modo como um dos grupos trabalhou, considerou aceitável o trabalho de outros quatro grupos, mas sentiu bastante frustração com o trabalho dos três grupos restantes. Indica que a maioria dos alunos gostou destas aulas e sentiu ter aprendido, mas reconhece que alguns alunos preferem aulas com exercícios, onde sentem aprender mais. Alexandra Rocha e Cristina Fonseca (2005), valorizando as descobertas dos alunos e as discussões realizadas na sala de aula, indicam que nem sempre o envolvimento dos alunos e a profundidade das discussões foi o que gostariam.

Ou seja, em todos os casos há importantes benefícios em termos de aprendizagens dos alunos, mas também há problemas que ficam por resolver. Esses problemas têm a ver com aspectos referentes ao envolvimento dos alunos no trabalho (que por vezes é muito difícil de conseguir), com as suas capacidades e conhecimentos (frequentemente abaixo do que seria de desejar), e também com a capacidade do professor para prever tudo o que se pode passar numa aula deste tipo e para tomar em cada momento a melhor decisão relativamente ao modo de prosseguir. A verdade é que uma aula com tarefas de natureza exploratória/investigativa é mais complicada de gerir do que uma aula baseada na exposição de matéria e na realização de exercícios, dada a imprevisibilidade das propostas e questões que os alunos podem colocar. Acresce, ainda, que os alunos à partida não sabem como trabalhar neste tipo de tarefas e precisam que o professor os ajude a fazer essa aprendizagem. Apesar das suas dificuldades e limitações, trata-se de um tipo de trabalho essencial na aula de Matemática, que visa objectivos educacionais diferentes dos das actividades mais estruturadas.

As experiências que referi foram produzidos no quadro do Grupo de Estudos “O professor como pesquisador” do GTI (Grupo de Trabalho de Investigação) da APM (Associação de Professores de Matemática). Este grupo decidiu empreender a elaboração de um livro com artigos originais, uns de natureza teórica, outros relatando

estudos centrados na prática profissional dos respectivos autores. O próprio grupo de estudos é um bom exemplo de um grupo de trabalho colaborativo. Nas reuniões foram discutidas as propostas de artigos, dando-se sugestões para o seu aperfeiçoamento. Combinando a interacção presencial com a interacção a distância, via *e-mail*, e articulando as reuniões com outras formas de trabalho, os artigos foram sendo sucessivamente aperfeiçoados até assumirem a forma definitiva. Encerrado um primeiro ciclo, em 2002, o Grupo de Estudos do GTI decidiu empreender um novo ciclo, agora com o tema mais específico *O professor e o desenvolvimento curricular*, que se concluiu em 2005. Presentemente, o Grupo de Estudos trabalha num terceiro ciclo, em que continua a desenvolver projectos de intervenção curricular, em relação com a cultura da escola dos professores participantes.

### **As experiências como projectos de pesquisa sobre a sua própria prática**

*Pesquisar a sua própria prática.* Por todo o mundo são cada vez mais os professores que pesquisam. Alguns fazem-no inseridos em programas de mestrado e doutoramento, outros no quadro de projectos que realizam nas suas escolas. No entanto, a pesquisa sobre a sua própria prática não diz apenas respeito a professores. É uma actividade que interessa igualmente a técnicos de orientação escolar e da administração educativa, psicólogos, formadores de professores e professores do ensino superior. Assistimos em muitos países ao desenvolvimento de um movimento cada vez mais alargado de profissionais da educação e de áreas como a saúde e o serviço social que pesquisam problemas relacionados com a sua própria prática.

Isso acontece porque estes profissionais defrontam-se na sua actividade com muitos problemas de grande complexidade. Em vez de esperar por soluções vindas do exterior, eles têm vindo cada vez mais a pesquisar directamente esses problemas. Tal pesquisa, para além de poder ajudar ao esclarecimento e resolução desses problemas, contribui igualmente para o desenvolvimento profissional dos participantes e para o aperfeiçoamento das respectivas organizações. Esta pesquisa, além do mais, contribui para o desenvolvimento do conhecimento e da cultura profissional nesse campo de prática e, em certos casos, traz novos elementos para o conhecimento e a cultura geral da sociedade.

Os professores envolvidos nas pesquisas acima indicadas desenvolveram-se profissionalmente. Para isso, foram importantes não só as pesquisas em si como o

trabalho de divulgação das suas experiências, elaborando artigos, o que permitiu um olhar mais aprofundado sobre as mesmas. Igualmente importante foi a apresentação oral das experiências em conferências e comunicações em encontros e congressos. O trabalho realizado (sistematizado nos dois livros) constitui, sem dúvida, uma importante mais valia para a educação matemática, mostrando caminhos que pode seguir a mudança curricular e a renovação das práticas profissionais.

***O papel da colaboração.*** No trabalho do GTI, a noção de colaboração<sup>3</sup>, assume um lugar fundamental. Diversas pesquisas envolvem um trabalho de colaboração de dois autores, Além disso, a colaboração foi também uma ideia fundamental no trabalho realizado por todo o grupo, que levou à escrita e aperfeiçoamento dos artigos. Na verdade, a colaboração, permitindo conjugar os esforços de diversas pessoas, constitui uma estratégia de grande valor para enfrentar os problemas da prática profissional. Várias pessoas a trabalhar em conjunto têm mais ideias, mais energia e mais força para derrubar obstáculos do que uma pessoa trabalhando sozinha e podem capitalizar na diversidade das competências individuais. Para isso, têm, é claro, que se adaptar uns aos outros, criando um sistema eficiente de trabalho conjunto.

A colaboração pode ocorrer entre professores, ajudando a caracterizar os problemas com que eles se defrontam, definir estratégias de actuação, avaliar resultados da acção, criando um ambiente de trabalho conjunto positivo e estimulante. Quando um dos membros do grupo está num momento menos bom, recebe o apoio dos outros membros. Quando um membro está mais inspirado, contagia todo o grupo.

Pode existir igualmente colaboração entre actores educativos diversos, como educadores matemáticos, matemáticos, psicólogos, sociólogos, animadores culturais, encarregados de educação, etc. No caso do grupo de estudos do GTI, trabalharam em conjunto professores de diferentes níveis de ensino – do 1.º, 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, do ensino secundário, de escolas superiores de educação e de universidades. Um grupo mais diversificado tem maior dificuldade em funcionar, pois os participantes têm muitas vezes estatutos, valores e linguagens diferentes e estes nem sempre se conseguem harmonizar facilmente. No entanto, a diversidade pode ser profundamente enriquecedora. Um grupo heterogéneo tem uma capacidade de acção acrescida, dada a variedade de competências dos seus membros. Na verdade, um trabalho como o do grupo de estudos do GTI, integrando ensaios teóricos e experiências concretas de

---

<sup>3</sup> Discutida em detalhe no primeiro livro do grupo, no artigo de Boavida e Ponte (2002).



pesquisa sobre a prática profissional, nunca poderia ter sido feito sem esta diversidade de participantes.

*A pesquisa como elemento da cultura profissional.* A valorização de uma cultura de pesquisa entre os professores não depende apenas de uma actuação mais ou menos voluntarista no plano individual. Pressupõe, pelo contrário, um papel fundamental das instâncias colectivas onde os professores exercem a sua actividade profissional, com destaque para as escolas, os movimentos pedagógicos e as estruturas associativas.

Um dos maiores obstáculos à afirmação de uma cultura de pesquisa nos professores é a velha oposição entre teoria e prática. Nesta oposição, a teoria é frequentemente apontada como algo fantasioso, inadequado para a interpretação da realidade, inútil ou até pernicioso. A prática, pelo seu lado, é vista como o campo da normalidade e do inevitável, onde todos os problemas encontram sempre justificação externa (sejam os alunos, os encarregados de educação, os explicadores, a falta de condições de trabalho ou a política do Ministério da Educação). Trata-se de uma concepção bizarra de teoria e prática. Na verdade, teoria e prática são duas faces de uma mesma moeda. Coexistem sempre. Onde há uma teoria há uma prática e onde há uma prática há uma teoria. O que é preciso é questionar se a teoria serve ou não serve e se a prática é recomendável ou problemática. Há muitas teorias que não prestam, mas há outras boas. Também há muitas práticas inadequadas, ao lado de outras exemplares. Pôr em diálogo, em cada situação, a teoria e a prática, é uma condição fundamental para a compreensão dos problemas e um passo essencial para a sua resolução. Isso consegue-se muito melhor no plano colectivo do que no plano individual, e aí está mais uma razão para sublinhar a importância do nível colectivo de actuação profissional do professor.

Na verdade, muitos passos têm ainda de ser dados para que se afirme uma verdadeira cultura de pesquisa no seio dos professores. Esta cultura não deve encarar-se como uma mera transposição do que se passa noutras comunidades académicas (como os matemáticos ou os educadores matemáticos) ou profissionais (como os médicos ou os engenheiros). Tem de equacionar-se no quadro da afirmação de uma nova profissionalidade docente.

### **A concluir**

Procurando defender a ideia que pode haver uma ligação estreita entre ensinar, aprender e pesquisar, apresentei diversas situações em que os alunos fizeram explorações e investigações matemáticas na sala de aula. Referi, também, diversas experiências em que os professores pesquisaram a sua própria prática e sublinhei a importância da dimensão colaborativa. Indiquei, finalmente, o papel da dimensão institucional e associativa para o desenvolvimento de uma nova cultura profissional, onde a teoria e a prática surjam ligadas de modo mais estreito. Baseei a minha argumentação numa perspectiva dessacralizada da pesquisa, como uma actividade onde todos podem participar, em contraponto com uma perspectiva elitista e restritiva, que reserva esta actividade para os “pesquisadores profissionais”.

No entanto, antes de concluir, parece-me ser necessário sublinhar que, apesar de defender uma perspectiva alargada da pesquisa, isso não significa que subscreva a banalização deste conceito. A pesquisa requer uma racionalidade muito diferente da simples opinião. Pressupõe, da parte de quem a realiza, um esforço de clareza nos conceitos, nos raciocínios e nos procedimentos. Exige reflexão, debate e crítica aprofundada pela comunidade dos pares. Isso requer, naturalmente, que as ideias sejam apresentadas de forma suficientemente detalhada e rigorosa para poderem ser compreendidas e debatidas. Requer uma racionalidade argumentativa mais sólida do que a simples justificação *ad hoc* e exige que se saiba qual o paradigma ou enquadramento teórico geral por onde essa racionalidade pode ser aferida.

Pesquisar não resulta de se conhecer e aplicar umas tantas técnicas de recolha de dados, sejam questionários ou entrevistas, e de fazer uma análise estatística ou de conteúdo. Pelo contrário, pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Pesquisar envolve três actividades complementares: estudar, conversar e escrever. Estudar – autores clássicos e autores modernos, autores da nossa área e autores que nos são exteriores, é fundamental para nos abirmos para o mundo, para acompanharmos o movimento intelectual contemporâneo, ao mesmo tempo que preservamos a essencial da nossa herança cultural. Conversar – com colegas, com outros actores educativos, com os nossos alunos, trocando impressões, ouvindo – é essencial para compreender os seus pontos de vista e formular a nossa perspectiva cada vez com mais clareza. Escrever – pondo preto no branco as nossas experiências, as nossas práticas, os nossos desejos e frustrações – permite que as nossas ideias sejam conhecidas e discutidas dentro e fora da comunidade

profissional. Só desse modo podemos chegar ao fundo das coisas, só desse modo podemos construir uma cultura marcada pelo profissionalismo, pela capacidade crítica e pelo rigor.

Enfim, a pesquisa não é certamente a solução que vai resolver em definitivo todos os problemas da educação. Sabemos bem que tal solução não existe. A pesquisa tem as suas potencialidades mas também tem os seus limites. Mesmo no ensino, é útil para atingir certos objectivos, mas não o será para outros. Nem tudo se pode aprender através da pesquisa. No entanto, isso não invalida a ideia que se trata de uma poderosa forma de construção do conhecimento tanto para o aluno como para o professor, que importa, por isso, promover no ensino da Matemática e na cultura profissional dos professores.

### Referências

- Almiro, J. P. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologias na aula de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 275-316). Lisboa: APM.
- Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Pesquisa colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e pesquisar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.
- Burton, L. (1984). *Thinking things through: Problem solving in mathematics*. London: Simon & Schuster.
- Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners – and what mathematics education can learn from them. *British Educational Research Journal*, 27(5), 589-599.
- Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- GTI (Ed.). (2002). *Reflectir e pesquisar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM.
- GTI (Ed.). (2005). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM.
- Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.
- Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em <http://ia.fc.ul.pt/>).
- Paula, I. (2005). Utilização de portefolios como processo integrador da aprendizagem e da avaliação em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 191-216). Lisboa: APM.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Pesquisar para aprender Matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.

- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Rocha, A., & Fonseca, C. N. (2005). Discutir Matemática: Um contributo para a aprendizagem. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 317-353). Lisboa: APM.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para pesquisa. *Bolema*, 14, 66-91.