

## **AS EQUAÇÕES NOS MANUAIS ESCOLARES**

João Pedro da Ponte

*Universidade de Lisboa - Portugal*

(aceito para publicação em setembro de 2004)

### **Resumo**

Este artigo identifica aspectos que foram mudando na abordagem das equações do 1º grau em quatro manuais escolares portugueses, um do fim do século XIX, outro de meados do século XX, outro da época da Matemática moderna (anos 70) e um da actualidade (anos 90). Os livros analisados testemunham uma evolução muito grande em pouco mais de mais de 100 anos, no nível etário dos alunos que estudam este conceito, na abordagem que se foi simplificando progressivamente, na relação com o leitor, do ponto de vista da visão da Matemática como uma disciplina com conexões múltiplas e em relação à variedade das tarefas propostas. Várias questões são sugeridas para trabalho futuro relativamente a este e outros conceitos do currículo, em Portugal e noutros países.

**Palavras-chave:** Ensino da Álgebra, Equações, Manuais escolares, Matemática escolar, Portugal

### **Abstract**

This paper identifies aspects that changed in the approach of first degree equations in Portuguese textbooks, one from the end of the 19th century, other from the middle of 20th century, other from the period of modern mathematics (the 70s) and one contemporary (the 90s). The books analysed represent a strong evolution in little more than a century, in the age level of pupils that study this concept, in the approach that become simpler along the way, in the relationship with the reader, in the perspective of mathematics as subject with multiple connections and regarding the proposed tasks. Several questions are proposed for future work regarding this and other curriculum concepts, in Portugal and elsewhere.

**Keywords:** Algebra teaching, Equations, Textbooks, School mathematics, Portugal

A aprendizagem das equações, conceito central da Álgebra, representa para os alunos o início de uma nova etapa no seu estudo da Matemática. Ao lado das expressões numéricas, envolvendo números e operações com que contactaram anteriormente, surgem agora outras expressões, envolvendo novos símbolos e novas regras de manipulação, que remetem para outro nível de abstracção. O início desta etapa revela-se particularmente problemático para muitos alunos, sendo neste ponto que se decide em grande medida quais

suas possibilidades de sucesso futuro na aprendizagem escolar desta disciplina. Por isso, é de todo o interesse fazer uma análise histórica acerca do modo como as equações têm sido introduzidas nos manuais escolares.

Neste trabalho, procuro identificar aspectos que foram mudando na abordagem deste importante conceito, no modo mais formal ou informal como as noções são apresentadas, na visão da Matemática que pressupõem e na natureza do texto e nas suas implicações para a leitura e o estudo. Centro a minha atenção em quatro manuais escolares portugueses, um do fim do século XIX, outro de meados do século XX, outro da época da Matemática moderna (anos 70) e, finalmente, um da actualidade (anos 90). Tomando como ponto de partida a metodologia utilizada por Sierra, González e López (2002) faço, para cada livro, uma breve descrição geral do modo como o tema é abordado, a que se segue uma referência à organização e grafismo e, de seguida, analiso os aspectos didácticos, incluindo as teorias de ensino-aprendizagem subjacentes e os elementos fenomenológicos. Termina com um conjunto de reflexões sobre o que mudou no tratamento deste conceito ao longo deste período de mais de um século nos manuais escolares à disposição dos alunos.

### ***Elementos de Álgebra de Augusto José da Cunha***

Trata-se de um livro publicado em 1887, em 5ª edição, pela Livraria de António Maria Pereira, destinado a alunos do 4º e 5º anos do liceu (as equações surgem na parte do 4º ano, que corresponderia hoje ao 10º ano de escolaridade, frequentado por alunos com 15 anos de idade). Na capa existe a menção “Redigidos conforme o programma dos lyceus” e o autor é apresentado como “Lente da Escola Polytechnica”<sup>1</sup>. No fim do livro, asseverando a respectiva legitimidade, é apresentado o programa de Matemática.

#### **Descrição**

Neste livro, a parte dedicada às equações do 1º grau tem um total de 14 páginas. Abre com uma pequena secção introdutória (três páginas) a que se segue um capítulo sobre a resolução da equação do 1º grau a uma incógnita, com duas secções, uma sobre princípios de equivalência (cerca de cinco páginas) e outra sobre a resolução da equação (outras cinco páginas) e termina com exercícios<sup>2</sup>.

A introdução visa sobretudo esclarecer aspectos de terminologia como “igualdade”, “identidade”, “equação”, “incógnitas”, “soluções” ou “raízes”, “grau da equação”, equação “numérica” e “literal”, e “equações equivalentes” (figura 1). Para distinguir equações numéricas e literais indica os casos  $3x^2 - 4x = 2 + 3x$  e  $2ax^2 - 5bx + c = a^2 - bx$ . Como primeiro exemplo de equações equivalentes apresenta  $\frac{3x+2}{4} - \frac{3}{8}x = 2$  e  $6x + 4 - 3x = 16$ .

<sup>1</sup> Nos termos indicados entre aspas, mantive a grafia original.

<sup>2</sup> A este capítulo, segue-se um capítulo II que já não é aqui objecto de análise por versar “Equações simultâneas do 1º grau”.

O capítulo “Resolução da equação do 1º grau a uma incógnita” tem um ponto I relativo aos princípios “em que se funda a resolução da equação”. Este ponto começa com o enunciado do 1º princípio (§ 89), a que se segue um “corollario” relativo à transposição dos termos (§ 90) (figura 2).

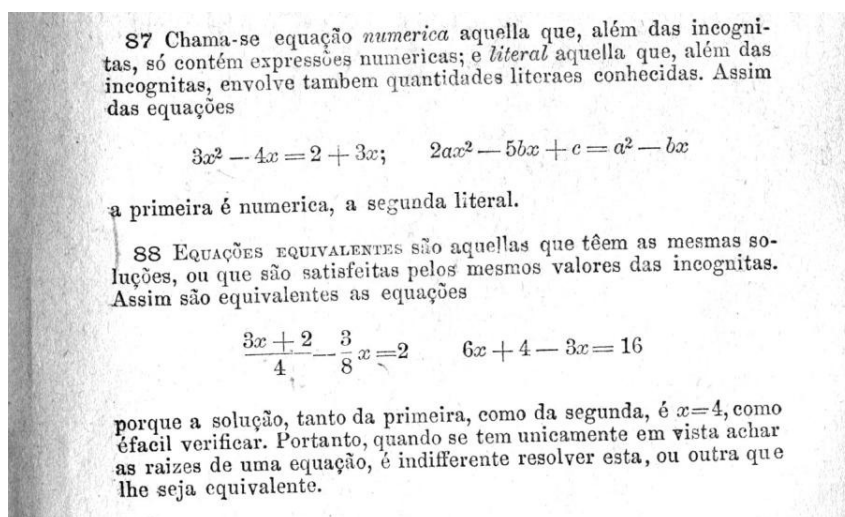


Figura 1 – Página com definições do livro *Elementos de Álgebra*

Segue-se o 2º princípio (§ 91) e depois uma “observação importante” – o multiplicador tem de ser diferente de zero, questão que é discutida em pormenor (§ 92). O 2º princípio permite tratar a “Reducção de uma equação á fôrma inteira” (por contraponto com a forma fraccionária), sendo apresentados três exemplos e enunciada uma regra prática (§ 94): “Procura-se o menor multiplo commum de todos os denominadores; multiplicam-se os termos inteiros por esse multiplo; o numerador de cada termo fraccionario multiplica-se pelo quociente d’esse multiplo dividido pelo respectivo denominador; e supprimem-se os denominadores”. Os exemplos são os seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} + 4x &= \frac{7x}{2} - 2 + \frac{1}{3} \\ \frac{2x}{a} + \frac{5ax}{a^2 - b^2} &= x - \frac{4}{a+b} + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3ab} - \frac{2ax}{a(a+b)^2} &= 2\frac{x}{a(a+b)} + \frac{x}{2b^2} \end{aligned}$$

Como se verifica, trata-se de exemplos com assinalável complexidade, o primeiro com uma equação de coeficientes numéricos onde aparecem desde logo fracções com quatro números diferentes em denominador e os outros dois com equações de coeficientes literais, tanto em numerador como em denominador.

O ponto II intitula-se “Resolução da equação”. Este ponto trata da resolução de qualquer equação do 1º grau a uma incógnita, começando com um exemplo (§ 96) onde surgem desde logo termos com coeficientes inteiros e fraccionários:

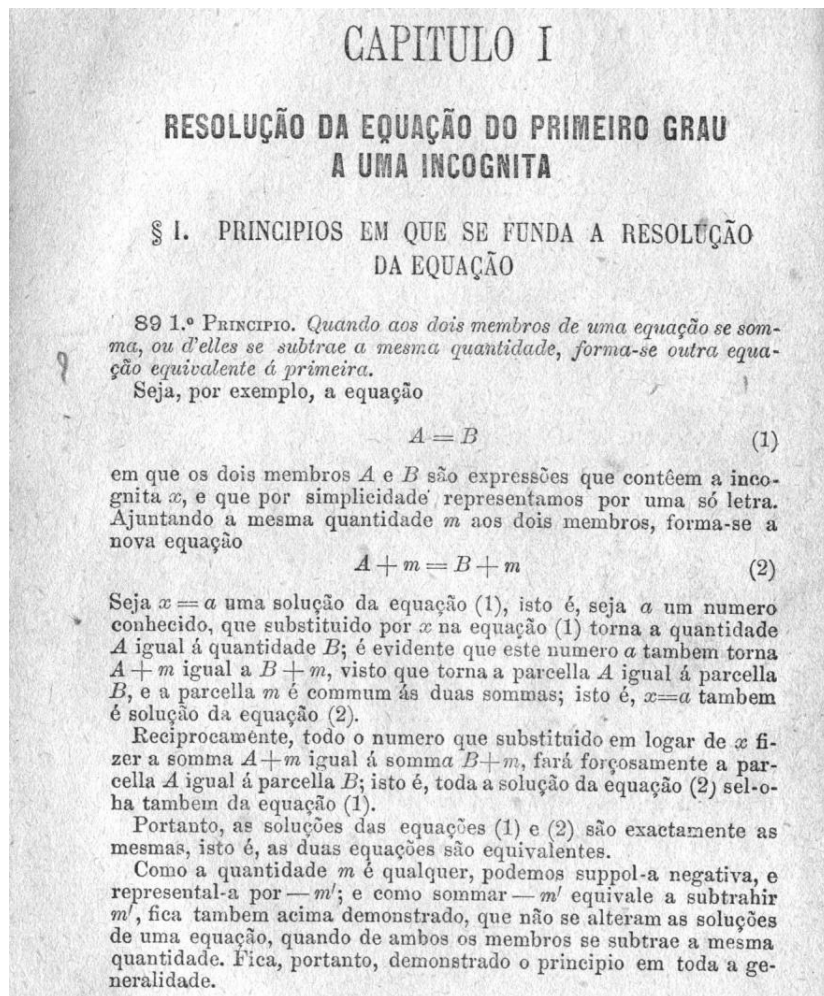


Figura 2 – Página com um princípio de equivalência do livro *Elementos de Álgebra*

$$\frac{3}{4}x - 3 + \frac{x}{2} = \frac{5}{3} - x$$

O § 97 respeita à verificação do valor da incógnita. Por sua vez, o § 98 apresenta uma regra com 4 passos para a resolução de equações, seguindo-se quatro exemplos:

$$\frac{3}{20} + \frac{x}{4} - 2x = \frac{x+3}{6}$$

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x}{a} = \frac{a-b}{a} - 1$$

$$\frac{2ax}{(a+b)^2} + \frac{1}{a-b} = \frac{bx}{a^2-b^2} + \frac{2a}{b(a+b)}$$

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{3}{5}$$

Note-se de novo a complexidade dos exemplos – a segunda e a terceira equações são literais e a última tem a incógnita em denominador. Finalmente, o § 99 mostra como toda a equação se pode reduzir à forma  $ax = b$  (sem usar o termo forma canónica) e o capítulo termina propondo 22 exercícios, todos enunciados sem quaisquer palavras, como expressões para calcular, indicando à frente a respectiva solução (figura 3). O mais

complexo desses exercícios é o seguinte:  $\frac{25 - \frac{1}{3}x}{x+1} + \frac{16x+4}{3x+2} \cdot \frac{1}{5} = 5 + \frac{23}{x+1}$ .

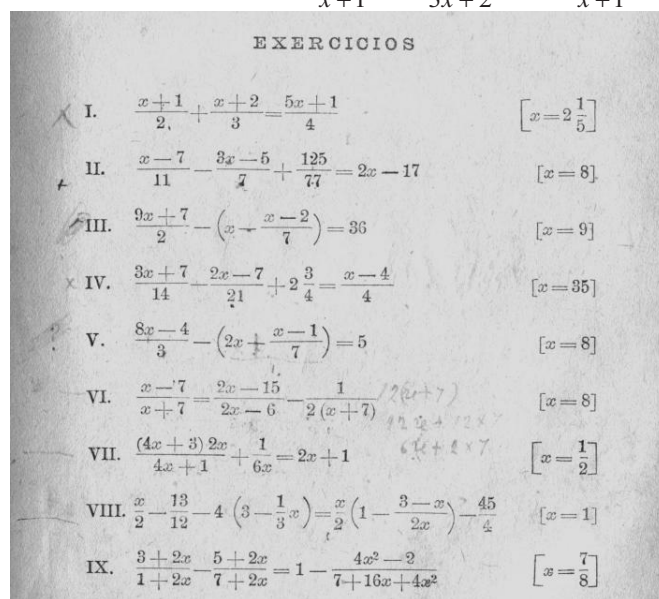


Figura 3 – Primeiros nove exercícios propostos do livro *Elementos de Álgebra*

## Análise

*Organização e grafismo.* O texto está dividido em 18 parágrafos numerados (§§ 82 a 99). É de notar que muitos parágrafos têm subtítulos. Ressalta de imediato a densidade do texto e o corpo de letra muito pequeno. Não há figuras, tabelas, ou esquemas. No entanto, são profusamente usados vários tipos de letra, maiúsculas, minúsculas, itálicos, etc.

*Aspectos didáticos.* Este livro representa uma abordagem com um nível de abstracção e formalização bastante elevado. Na verdade, lida, logo desde o início, com equações de coeficientes tanto numéricos como literais. Além disso, pressupõe um conhecimento anterior aprofundado de expressões algébricas, operações com monómios, polinómios e fracções algébricas. A terminologia essencial é explicada nas três páginas da parte introdutória.

O autor dá bastante relevo à forma inteira, apresentando a forma  $ax = b$  apenas no fim do capítulo (§ 99). A noção de identidade tem uma proeminência significativa, aparecendo logo no § 83. Existe uma preocupação em ensinar técnicas para a resolução de equações, sendo indicada explicitamente uma “regra prática para a redução à forma inteira” (§ 94) e uma “regra para a resolução de equações” (§ 98).

As únicas tarefas que aparecem explicitamente para serem realizadas pelos alunos são os exercícios no final do capítulo, todos com uma natureza muito semelhante, embora de complexidade crescente.

Este livro parece pressupor um ensino realizado numa lógica essencialmente dedutiva, em que se estabelece primeiro a terminologia, depois os princípios e depois a sua aplicação à resolução de equações. Existe a preocupação de tratar logo desde o início um caso bastante geral – a equação literal do 1º grau com várias incógnitas.

*Aspectos fenomenológicos.* No que respeita aos contextos onde se situa o discurso, todas as situações abordadas como exemplos e exercícios revestem-se de um carácter estritamente matemático. Não existem quaisquer referências de natureza histórica.

## Compêndio de Álgebra de J. Jorge G. Calado

Este livro é publicado em 1952, sendo a depositária a Livraria Popular de Francisco Franco e destina-se ao 3º ano do 2º ciclo do liceu (nesta altura, alunos com 14 anos). Trata-se de um livro único, sendo informado que o autor é “Professor no Liceu Pedro Nunes”. No início do livro, como fonte de legitimidade oficial, é apresentado o programa de Matemática. Em nota de rodapé, o autor remete para livros matemáticos reconhecidos, usados como base de orientação (Rey Pastor e Puig Adam) ou onde se faz um tratamento mais rigoroso dos assuntos tratados (Rey Pastor, J. Tannery), o que constitui uma forma de procurar estabelecer igualmente uma legitimidade científica.

## Descrição

O capítulo respeitante às equações numéricas do 1º grau tem 25 páginas e está dividido em três partes, a primeira designada de “Generalidades” (cerca de nove páginas), a



segunda de “Princípios de equivalência” (oito páginas) e a terceira de “Equação do 1º grau a uma incógnita” (seis páginas). O capítulo termina com exercícios (duas páginas).

A primeira parte inicia-se com o § 104, que, como motivação, discute a “origem e significado” das equações. Os §§ 105-106 apresentam problemas dentro dos quais se apresenta o significado de “dado” e “incógnita”. O primeiro deste problemas é o seguinte: “João tem o triplo da idade de António; a soma das duas idades é igual a 32 anos. Que idade tem António?”. Os §§ 108-109 apresentam a definição de “equação” à custa da noção de “igualdade” e definem raiz ou solução (figura 4).

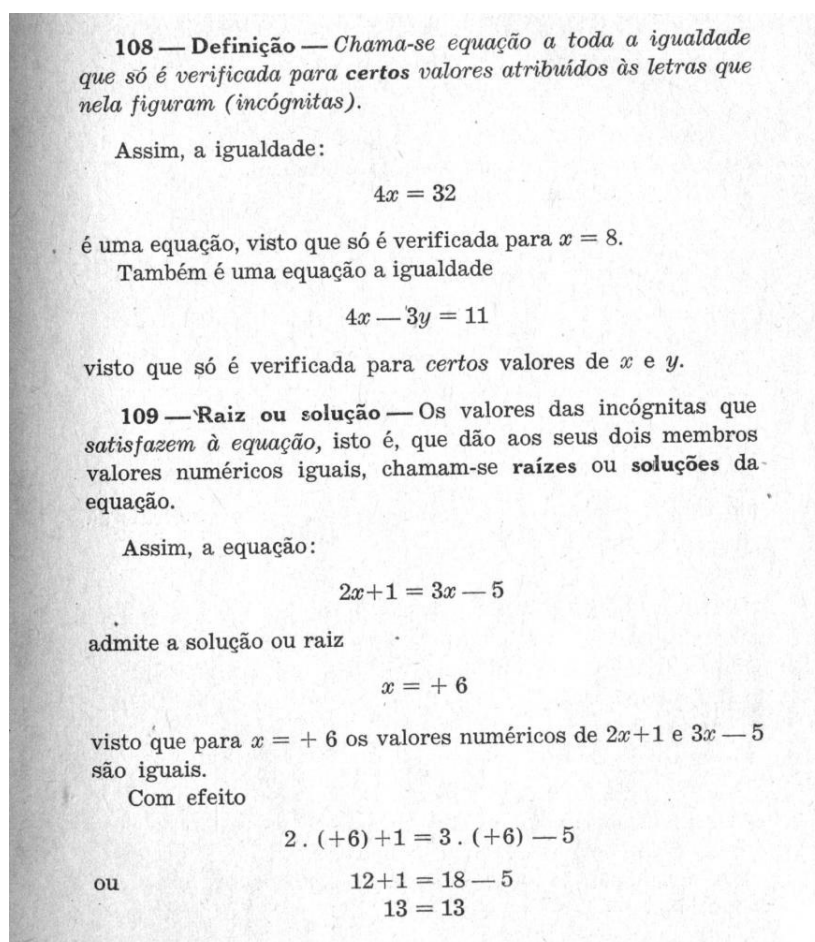


Figura 4 – Definições do livro *Compêndio de Álgebra*

Os §§ 110-111 indicam uma definição e símbolo para “identidade” e referem exemplos de identidades notáveis. O § 112 indica quatro “propriedades” assim enunciadas:

- a) *Toda a equação é uma igualdade condicionada.*
- b) *Toda a identidade traduz uma igualdade que não depende dos valores atribuídas às letras que nela figuram.*
- c) *Toda a equação estabelece um problema.*
- d) *Toda a identidade estabelece um facto.*

O § 113 aborda a noção de equações equivalentes e o § 114 o que significa “resolver uma equação”.

A segunda parte, sobre princípios de equivalência, contém nos §§ 115-120 o enunciado destes princípios (figura 5). Contém, igualmente, uma regra prática da transposição de termos enunciada do seguinte modo: “Podemos transpor um termo de uma equação de um membro para o outro com a condição de lhe trocarmos o seu sinal”. O § 121 introduz uma classificação de equações quanto ao número de incógnitas e à sua natureza (inteira ou não). O § 122 define o grau de uma equação inteira.

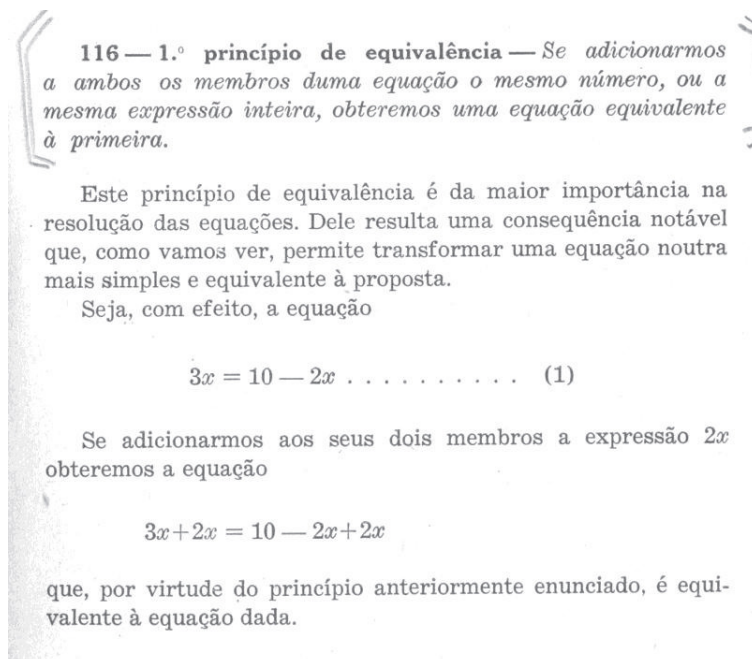


Figura 5 – Primeiro princípio de equivalência do livro *Compêndio de Álgebra*



A terceira parte abre com o § 123 que dá uma definição de equação do 1º grau, como sendo “toda a equação que se pode reduzir à forma  $ax = b$ ”. O § 124 discute a resolução algébrica, indicando a partir de dois exemplos, cinco passos a seguir na resolução de uma equação. O primeiro destes exemplos é muito simples e o segundo bastante complexo:

$$-2x = 3$$

$$\frac{x}{2} - 2(3 - x) = 3 + \frac{x}{4}$$

De seguida, os §§ 125-127 apresentam a resolução gráfica, com indicação de um procedimento (figura 6)

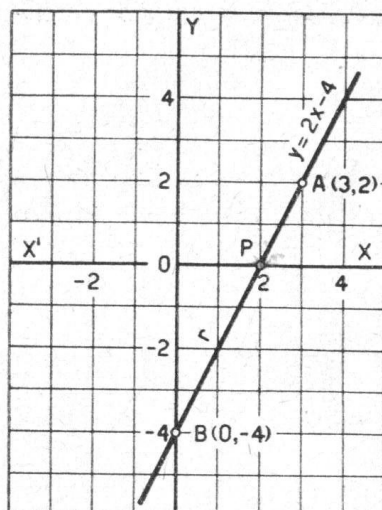


Figura 6 – Resolução gráfica de uma equação no livro *Compêndio de Álgebra*

O capítulo termina com 29 exercícios, e as correspondentes soluções (figura 7). Os exercícios propostos envolvem a verificação se certos números são raízes de certas equações, o enunciado dos princípios de equivalência e a resolução algébrica e gráfica de equações. A equação mais complexa proposta para resolver algebricamente é

$$\frac{x}{6} + \frac{x - \frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) = 0.$$

**EXERCÍCIOS**

**RAIZES E EQUAÇÕES**

- 1) Verifique se o número 1 é raiz da equação  $x+3=2(x+1)$
- 2) Verifique se o número  $-\frac{1}{2}$  é raiz da equação  $2x-3=x+\frac{9}{2}$
- 3) Verifique se o número  $\frac{1}{2}$  é raiz da equação  $x+\frac{1}{2}=(x-1)^2+\frac{3}{4}$
- 4) Quais dos números  $-2$ ;  $0$ ;  $1$ ;  $2$  são raízes da equação  $(x+1)^2-2x=5$ ?

**PRINCÍPIOS DE EQUIVALÊNCIA**

- 5) Enuncie o princípio que permite afirmar que a equação  $2x-\frac{1}{3}=x-1$  é *equivalente* à equação  $6x-1=3x-3$
- 6) Enuncie o princípio que permite afirmar que a equação  $2x-3=4$  é *equivalente* à equação  $2x=4+3$
- 7) Complete a equação  $3x-6=$  de modo que a equação resultante seja equivalente à equação  $\frac{x}{2}-1=\frac{1}{3}+x$ . Enuncie o princípio de equivalência que utilizou.

**RESOLUÇÃO ALGÉBRICA DE EQUAÇÕES**

- 8) Resolva as seguintes equações:
 

a) $5x+10=4x+8$	b) $18y+4=34y-4$	c) $7(x-18)=$
$=3(x-14)$	d) $4(x-3)-7(x-4)=6-x$	e) $36-\frac{4t}{9}=8$
f) $\frac{7y}{8}-5=\frac{9y}{10}-6$	g) $\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}+\frac{5x}{12}=15$	h) $\frac{3v-16}{5}=\frac{v}{3}$

Figura 7 – Primeiros oito exercícios propostos do livro *Elementos de Álgebra*

### Análise

*Organização e grafismo.* O capítulo é composto por 25 parágrafos numerados (§§ 104 a 128). Muitos dos parágrafos têm subtítulos. O grafismo distingue-se por não existir um único esquema ou tabela. No entanto, no § 125 surgem duas representações gráficas para a resolução gráfica de equações do 1º grau.

*Aspectos didáticos.* Sobressai o facto que o conceito de equação é ainda aqui um conceito tardio: só surge depois de abordadas as expressões algébricas, operações com

monómios e polinómios e fracções algébricas. Os problemas do 1º grau aparecem mais tarde num outro capítulo. Em contraste com o livro anterior, o capítulo praticamente só lida só com equações de coeficientes numéricos.

A terminologia é apresentada essencialmente logo no início. Diz-se que uma equação do 1º grau a uma incógnita é a que se pode reduzir à forma  $ax = b$ , mas não se fala em forma canónica. A noção de identidade tem uma proeminência significativa (ver §§ 110-112).

O autor indica explicitamente um procedimento algébrico para a resolução de equações (§ 124) e um outro procedimento gráfico (§ 126). É muito usada a terminologia “desembaraçar de denominadores” (§ 120), e continua a falar-se em “equações inteiras” (§ 121).

Neste livro, o texto desenvolve-se a partir de dois problemas iniciais que são resolvidos “em diálogo do autor com o leitor”. No fim do capítulo, as tarefas propostas para o aluno são exercícios de três tipos: verificação de raízes de equações, enunciado de princípios de equivalência e resolução algébrica e gráfica de equações.

Na abordagem didáctica nota-se o facto do autor fazer um esforço de motivação ao falar do “objectivo fundamental da Álgebra” e dos matemáticos árabes que cunharam o termo Álgebra (§ 104). É também de sublinhar que o autor inicia o assunto a partir de “problemas” e procura um certo equilíbrio entre as abordagens indutiva e dedutiva.

*Aspectos fenomenológicos.* No que respeita às situações invocadas, o autor recorre a problemas de idades (do João, do António...), que constituem elementos do quotidiano, e a problemas numéricos (“calcular dois números sabendo que...” para a introdução do tema. No entanto, a partir do § 110, todos os exemplos são estritamente matemáticos. É feita uma referência ao papel das equações na Álgebra e à origem histórica deste termo.

### ***Compêndio de Matemática de***

**António de Almeida Costa e Alfredo Osório dos Anjos**

Embora não tenha data, este livro foi presumivelmente publicado em 1970, sendo a depositária a Porto Editora. É ainda livro único e destina-se a alunos do 1º ano do ensino liceal (com 12 anos). Os autores são apresentados com as suas afiliações institucionais: ambos têm cargos de responsabilidade, sendo o primeiro “Reitor no Liceu Normal de D. Manuel II”, e o segundo “Professor Metodólogo no Liceu Normal de Pedro Nunes”.

### **Descrição**

O capítulo está subdividido em secções: equações numéricas, equações literais, problemas do 1º grau e sistemas de equações. Neste trabalho só considero a primeira secção, relativa às equações numéricas, que tem 17 páginas e termina com exercícios.

Nos §§ 1.1-1.2 a noção de equação é introduzida como “igualdade numérica”. São propostos problemas de “pensar em números”, através dos quais são introduzidas diversas noções – “membro”, “incógnita”, “raiz” ou “solução”, “resolver uma equação” (§§ 1.3, 1.5-1.7) (figura 8). A primeira resolução de uma equação (§ 1.4) é feita por invocação das operações inversas e das propriedades das operações.

Não podemos dizer se é uma igualdade verdadeira ou falsa; deixa-nos, apenas, a esperança de encontrar um número que, substituindo  $x$ , a transforme numa igualdade numérica verdadeira.

Por isso, alguém disse já que «equação é uma esperança de igualdade».

Mas existirá o tal número? Não o sabemos ainda. Se existir, diremos que ele *satisfaz* a equação.

Satisfazer uma equação significa transformá-la numa igualdade numérica verdadeira

Na equação:

— As expressões que figuram de um e outro lado do sinal  $=$  mantêm o nome de *membros*.

$3x + 16$  ... é o 1.º membro

$37$  ... é o 2.º membro

— A letra  $x$ , que representa o número ainda desconhecido, é a *incógnita*.

— Um valor da incógnita que venha a satisfazer a equação é uma *raiz* ou *solução* dessa equação.

O que se pretende é calcular a raiz ou raízes da equação, ou concluir que não tem nenhuma.

Conseguí-lo, é *resolver a equação*.

Figura 8 – Definições no livro *Compêndio de Matemática*

No § 1.8, referenciados como “questões de linguagem”, surgem os termos “monómio”, “polinómio”, “binómio”, “trinómio”, “coeficiente do monómio”, “monómio semelhante” e define-se “soma algébrica de monómios semelhantes” seguida de um exemplo.

No § 1.9, a partir da equação  $3x + 2 = \frac{5x + 18}{3}$ , é apresentada a regra da transposição de um termo de um membro para outro, com troca de sinal. No § 1.10 são propostos novos problemas onde surgem os processos de desembaraçar de denominadores, desembaraçar parêntesis e, no § 1.12, fala-se na redução de termos semelhantes. No § 1.13 é apresentada uma regra prática com cinco passos para resolução de equações (figura 9), que é ilustrada com os seguintes exemplos (apresentados como “aplicações”) no § 1.14:

$$2x + \frac{1}{2}(x - 2) = 17$$

$$x + 3\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{4}x + 5$$

$$2(x + 3) = 2x + 5$$

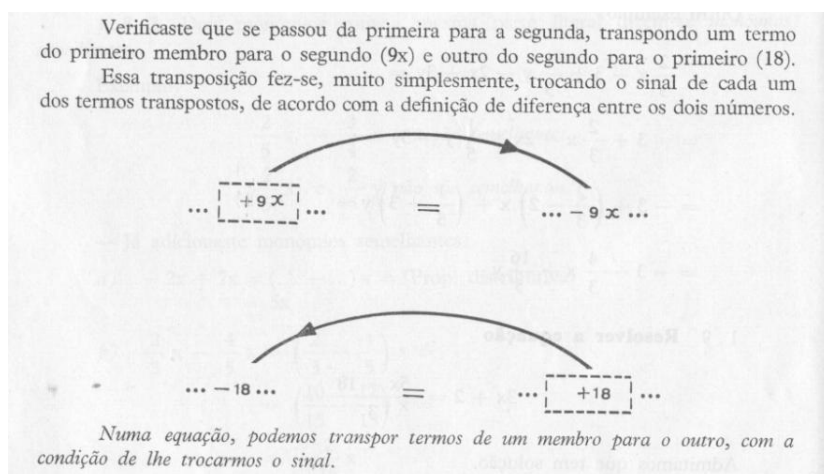


Figura 9 – Regra prática para a resolução de equações no livro *Compêndio de Matemática*

Finalmente, introduz-se a noção de equação “impossível” e equação “de solução indeterminada” e referem-se como “novas questões de linguagem” o “grau de um monómio” e a “forma canónica ou normal”.

A secção termina com 49 exercícios, todos eles formulados como expressões algébricas “para resolver” e são dadas as soluções (figura 10). O caso mais complexo proposto é a equação  $\frac{4+x}{2} + \frac{1+x}{4} = 0$ .

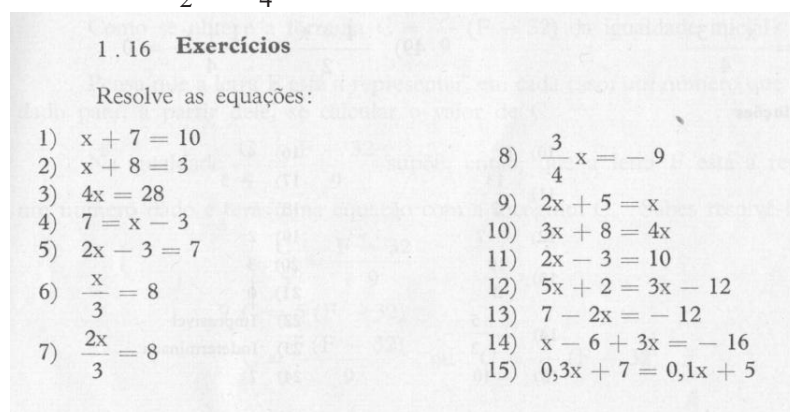


Figura 10 – Primeiros quinze exercícios propostos do livro *Compêndio de Matemática*

## Análise

*Organização e grafismo.* Em termos de organização, o capítulo contém parágrafos numerados (1.1 a 1.15), com uma numeração complexa – (a.b) ou (a.b.c) – não sequencial. Alguns (poucos) dos parágrafos têm subtítulos. No que respeita a grafismo, apresenta esquemas relativos às operações envolvidas numa equação (§§ 1.4 e 1.5). Apresenta igualmente um esquema sobre a transposição de termos de um membro para outro (§ 1.9).

Em termos de estilo de escrita, é de registar um apelo à participação do aluno para completar uma tabela (§ 1.8.2). Surgem muitas vezes as perguntas “porquê?”, para justificação dos passos, no estilo de José Sebastião e Silva (1964). Além disso, os autores interpelam directamente o aluno com expressões como “comparaste”, “verificaste...”...

*Aspectos didácticos.* É de notar que já não se trata de um livro de Álgebra mas sim de “Matemática”. Em comparação com o livro anterior, descemos dois anos no nível etário dos alunos e o tema aparece no início do ano (o livro em questão é o primeiro dos dois volumes do ano). A secção que analisei só lida só com equações de coeficientes numéricos, sendo as equações literais estudadas noutra secção imediatamente a seguir.

A terminologia é introduzida a pouco e pouco. Mesmo no fim da secção (§ 1.15), diz-se que as equações escritas na forma  $ax = b$  (com  $a \neq 0$ ) estão na forma canónica ou normal.

A noção de identidade não é referida mas de uma forma informal fala-se em igualdade. Há uma preocupação clara em que o aluno aprenda a resolver equações, indicando explicitamente uma “regra prática para a resolução de equações” (p. 104). No entanto, não há qualquer referência explícita a princípios de equivalência e estes não chegam a ser enunciados.

Neste livro, diversos exemplos surgem como problemas, sendo resolvidos “em diálogo do autor com o leitor”. Como tarefas explícitas para o aluno fazer, surge um quadro para completar (§ 1.8.2) e uma lista de exercícios, todos de resolução de equações.

O livro tem um pequeno prefácio onde são indicados diversos objectivos e intenções. Os autores referem o carácter transitório das “experiências pedagógicas” e avançam com uma justificação antecipada perante eventuais críticas:

*Naturalmente, para além das insuficiências dos seus autores, traz consigo o reflexo do momento de indecisão em que se vive e, também, as urgência do seu aparecimento. Além de que, como sempre sucede, o desejo de maior clareza terá sacrificado, aqui e ali, um sentido mais definido de rigor. É o caso, por exemplo, da escolha das grandezas susceptíveis de variar em dois sentidos opostos, em que se deixou na sombra o seu carácter aditivo, e da névoa inevitável na criação dos números reais.*

*Mas é uma fase de um processo experimental, onde até os erros são permitidos, para deles se colher a lição que encerrem.*

*Muito gratos ficarão os autores a quem os ajudar nessa tarefa.*



Fruto da época da Matemática moderna, na sua fase de institucionalização, este livro assume-se como parte de um movimento de “resposta aos processos de modernização da própria ciência”. Aponta que se querem “criar na Escola atitudes de pensamento adequadas”.

*Aspectos fenomenológicos.* É de referir que existe bastante terminologia matemática e esta aparece ligada à ideia de jogo (jogos com números). A única referência a situações do quotidiano, é um hipotético rapaz (“Rui”) disposto a jogar o jogo pensar em números (§ 1.5). Não se fala de outras ciências nem de outros fenómenos. Não há qualquer referência a elementos históricos.

### ***Compêndio de Matemática de Maria José Soares***

Este livro é publicado em 1992 pela Texto Editora e destina-se ao 7º ano do ensino básico (alunos de 12 anos). O título é idêntico ao anterior, estando portanto a Álgebra integrada na Matemática. Pode dizer-se que se trata de um livro de editora, o que se revela, por exemplo, pelo facto de, na capa, o nome da editora aparecer com maior destaque que o nome da autora. Na capa, existe a menção “novos programas”, fonte de legitimidade e também expressão da estratégia comercial. Não são dadas informações sobre a autora – sabemos apenas que é professora de Matemática. Não deixa de ser interessante que esta agradeça “ao colega Manuel Simões a colaboração e cedência de material” (prefácio).

### **Descrição**

O capítulo das equações do 1º grau tem 22 páginas. Antes de mais surge um extracto do programa e uma espécie de índice. Segue-se uma informação sobre pré-requisitos e mais duas secções, uma com cerca de cinco páginas e outra com oito – ambas as secções têm duas subsecções. O capítulo fecha com três páginas com “jogos e exercícios”.

A autora procura motivar os alunos para o estudo das equações a partir da pergunta “Porquê equações?” (p. 157), fazendo referência às aplicações da Matemática à Física, à engenharia, ao comércio bem como ao seu papel na resolução de problemas.

A noção de equação é apresentada a partir de um problema envolvendo dinheiro: “A que quantia devemos retirar 3 contos para obter 5?” (p. 158). Logo desde o início (p. 158) é introduzido um quadro com terminologia: “equação”, “incógnita”, “membro”, “termo”, “termo em  $x$ ”, “termo independente”, “termos semelhantes” (figura 11). Não se fala em “igualdade”, indicando-se que uma equação é “a expressão que se obtém ligando duas expressões pelo sinal de igual” (p. 158).

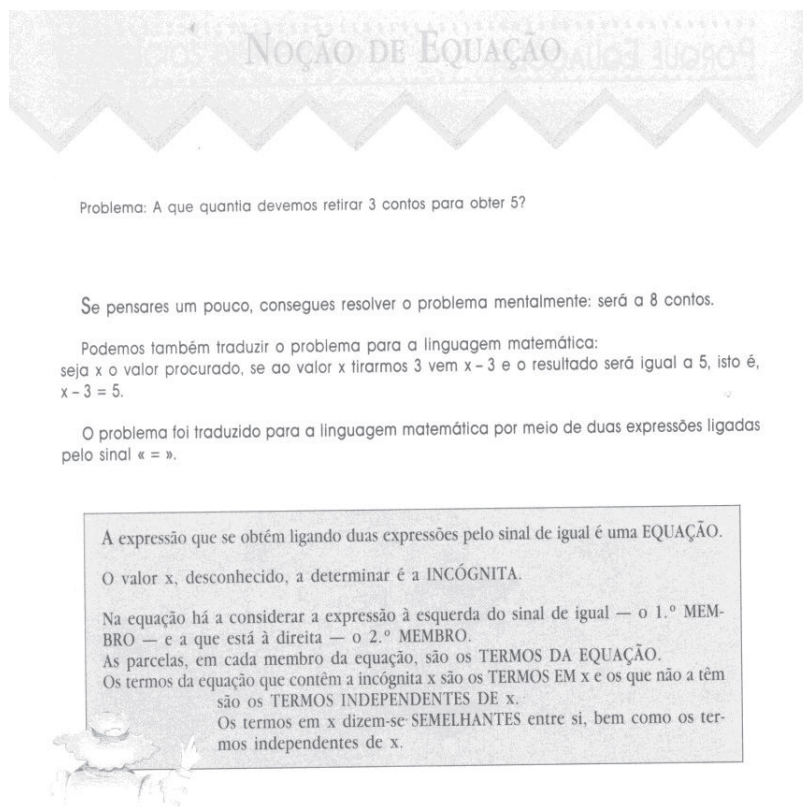


Figura 11 – Definições no livro *Compêndio de Matemática*

Na página seguinte inicia-se uma subsecção intitulada “Soluções”, onde se apresenta este conceito e, implicitamente, a ideia de conjunto-solução, a que se seguem vários exemplos destinados a clarificar este conceito e o uso da terminologia:

$$5x - 3 = \frac{1}{2} + 2x$$

$$3x + 4 = 1 + 4x$$

$$3x + 1 = 7 + x$$

$$\frac{3x + 1}{2} = 1 + 2x$$

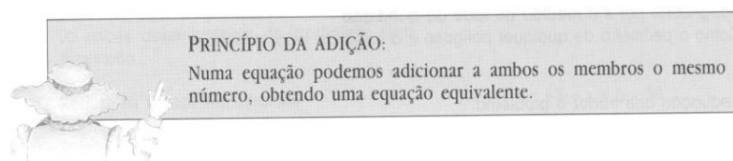
A subsecção termina com três exercícios.

Segue-se uma segunda subsecção sobre “Equações equivalentes”, apresentadas como “as que têm as mesmas soluções” (p. 161), indicando-se um exemplo de equações

equivalentes:  $x - 3 = 1$  e  $2x - 8 = 0$ . De notar que esta subsecção tem menos de uma página e nela nenhum parágrafo tem mais de duas linhas.

A segunda secção intitula-se “Resolução de equações” e abre com uma subsecção sobre “Adição de termos semelhantes”. São aqui introduzidos os termos “monómio”, “coeficiente”, “parte literal”, apresentada a regra para adição de monómios semelhantes, diversos exemplos e sete exercícios em que o mais complicado é adicionar  $x + \frac{1}{6}x$ . A subsecção seguinte intitula-se “Regras para a adição de equações” (p. 164), que abre com o seguinte problema: “Se o Nuno der ao Pedro dois berlindes este fica com dez. Quantos tem agora?”. Esta secção inclui dois princípios (figura 12) e uma “regra” relativa à transposição de termos: “REGRA: Numa equação podemos transpor os termos de um membro para o outro trocando-lhe o sinal” (p. 165).

Resolver o problema é encontrar a solução da equação que o traduz e a que corresponde ao que é pedido no enunciado.  
Para resolver a equação vamos aplicar a seguinte propriedade:



Assim, à equação  $x + 2 = 10$  adicionemos, a ambos os membros,  $(-2)$

$$x + 2 + (-2) = 10 + (-2)$$

Como os termos  $(+2)$  e  $(-2)$  são simétricos anulam-se, e obtemos a equação equivalente

$$x = 10 - 2$$

o que não é mais do que transpor o termo 2 do primeiro para o segundo membro, trocando-lhe o sinal.

Reduzindo os termos semelhantes obtemos a solução do problema, que já sabias...

$$x = 8 \text{ berlindes que tinha o Pedro.}$$

A partir do que fizemos neste exemplo podemos generalizar, enunciando a seguinte:

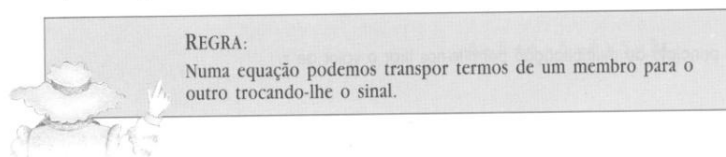


Figura 12 – Princípio (de equivalência) e regra do livro *Compêndio de Matemática*

O segundo princípio é apresentado a partir do problema: “O perímetro de um quadrado é 16; qual é a medida do lado?” (p. 166). Apresenta-se ainda um terceiro problema: “A base de um rectângulo mede mais 5 cm que a sua altura, sendo o perímetro 34 cm. Quais as dimensões do rectângulo?” (p. 167). Indica-se então, através de um exemplo, um procedimento geral para a resolução de uma equação. Este procedimento fala em desembaraçar de parêntesis e reduzir os termos semelhantes (p. 167), mas não fala de desembaraçar de denominadores. Tendo apresentado diversos problemas ao longo do capítulo, a autora resume agora “os seguintes passos na resolução de um problema” (p. 168):

#### RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA:

- *escolher a incógnita*
- *traduzir o problema em equação;*
- *resolver a equação;*
- *analisar a solução e dar a resposta.*

#### JOGOS E EXERCÍCIOS

1. De entre as equações seguintes:

$$5x - 4 = 2x - 6 \quad ; \quad 3x + 1 = 4 + 2x \quad ; \quad 3x + 4 = 2x - 1$$

- a) Identifica o primeiro e segundo membros.
- b) Identifica os termos em  $x$  e os termos independentes.
- c) Qual das equações tem solução 3?

2. Pensa e resolve.

- a) Verifica que 5 é solução da equação  $3x - 6 = 9$ .
- b) Averigua qual das equações seguintes é equivalente à dada:

$$x + 2 = 3 \quad ; \quad 6x - 18 = 12 \quad ; \quad 36 - 12x = 24$$

3. Entre as equações seguintes há duas equivalentes e que têm a solução  $x = -2$ :

$$4x - 2 = 2x - 6 \quad ; \quad 7 - x = x - 8 \quad ; \quad 2x + 3 = x + 1$$

Quais são?

4. Resolve mentalmente as equações seguintes e verifica se é ou não correcto o que acerca delas se afirma:

- a)  $4 - 2x = 0$  Solução negativa.
- b)  $2x = 27 - x$  Solução positiva.
- c)  $5 = 4 - 2x$  Solução inteira.

Figura 13 –Primeiros 4 exercícios propostos do livro *Compêndio de Matemática*

De seguida, a autora apresenta mais um exemplo de um problema (desta vez com idades do João e do pai) a que se seguem três exercícios. Aborda depois as equações impossíveis e indeterminadas, dando novos exemplos e exercícios.

O capítulo termina (pp. 171-173) com 22 “jogos e exercícios” (não indica soluções). Os primeiros exercícios são de reconhecimento de terminologia. (figura 13) Algumas destas questões poderiam considerar-se “problemas” ou “exercícios com história”. A equação com denominadores mais complicada que é proposta para resolver é  $\frac{8x-4}{7} = \frac{3x+8}{5}$ . São também propostas equações com números decimais, como

$$7(4x+3) - 15(x+0,75) = 7 + 4(x-1), \text{ e com valores absolutos, como } |x+3| = \frac{1}{2}.$$

Um dos problemas propostos mais complexos é o seguinte: “Um lavrador tem galinhas, patos e coelhos, num total de 61 animais. Sabendo que o número de galinhas é triplo do de coelhos, e que há mais cinco patos que galinhas e coelhos juntos, quantos animais de cada género tem ele?”

### **Análise**

*Organização e grafismo.* Em termos da organização do texto, deixa de existir parágrafos numerados. Aliás, quase que se pode dizer que deixam de haver parágrafos, sendo o texto composto essencialmente por frases muito curtas.

No que se refere ao grafismo, é de assinalar a existência de um pequeno esquema (p. 158) e uma tabela (p. 153), bem como um quadro a fundo cinzento, onde se indicam os conceitos e ideias-chave (p. 158), quadro este que se vai repetir quase à média de um por página... Aparecem também figuras geométricas (pp. 166-7) e figuras relacionadas com questões propostas (pp. 172-3). Para além disso, em várias páginas aparecem figuras meramente decorativas. No total das 22 páginas do capítulo, as páginas directamente relacionadas com o tema são cerca de metade. As restantes páginas têm o programa, o índice, pré-requisitos, exercícios de revisão, jogos e exercícios ou simplesmente figuras decorativas.

*Aspectos didácticos.* O capítulo lida só com equações de coeficientes numéricos, sendo as equações literais estudadas num ano posterior. A terminologia é introduzida logo desde o início do capítulo. Não se fala em identidade nem em forma canónica e nunca se escreve a expressão  $ax = b$ . São indicadas explicitamente “regras” para a resolução de equações. São apresentados os princípios de equivalência, designados apenas como “princípios”.

Ao longo do texto são apresentados pequenos grupos de exercícios em diversas ocasiões. No final do capítulo surge um conjunto diversificado de tarefas, incluindo questões ligadas ao reconhecimento de conceitos, problemas de índole geométrica, problemas formulados em linguagem matemática (por exemplo, com valores absolutos) e problemas contextualizados em situações do quotidiano.

O prefácio indica que estamos numa “fase de mudança” curricular. No que se refere a objectivos e intenções, é de notar que o manual surge expressamente dirigido ao

aluno e ao professor, a quem se procura “facilitar o processo de transição” dos antigos para os novos programas, que são explicitamente indicados.

Algumas ideias sobre o ensino-aprendizagem perfilhadas pela autora são claramente evidentes:

- O domínio dos pré-requisitos é uma condição fundamental para a aprendizagem.
- O manual procura ter uma “mensagem clara e acessível” e utilizar “aspectos lúdicos” (prefácio).
- Valoriza-se a interdisciplinaridade, o trabalho de grupo e trabalho de projecto (prefácio).
- Acha-se que é importante que os alunos possam “construir, pensar, discutir e concluir sobre alguns dos temas” (prefácio).

Ou seja, a autora parece querer satisfazer uma clientela de professores com gostos pedagógicos diversificados.

*Aspectos fenomenológicos.* A maior parte dos exemplos são formulados em termos puramente algébricos. No entanto, surgem problemas de natureza geométrica, relativos ao perímetro de um quadrado (p. 166) e às dimensões do rectângulo (p. 167). Surgem também problemas do quotidiano: problemas de dinheiro (5 e 8 contos), berlindes do Nuno e Pedro e idade do João e do pai. Não existem referências de natureza histórica.

### **Conclusões**

Os três primeiros manuais escolares (um do século XIX e dois do século XX) são “livros de autor”, elaborados por figuras importantes no meio académico e profissional. O último dos livros considerados é já um “livro de editora”. O autor passou a ser um elemento secundário, quase anónimo. Em todos os livros analisados, os programas oficiais são consistentemente invocados como fonte de legitimidade.

Estes quatro livros testemunham uma evolução muito significativa no ensino das equações ao longo de mais de 100 anos. Desde logo, o nível etário dos alunos que estudam este conceito foi baixando dos 15 aos 12 anos. Ao mesmo tempo, a abordagem mais formal e abstracta foi dando origem a abordagens muito mais simples. Enquanto que no século XIX se estudavam as expressões algébricas (incluindo fracções algébricas) e depois as equações numéricas e literais e logo a seguir os sistemas de equações, mais tarde passou-se a diferenciar várias etapas neste estudo, a realizar em anos diferentes: equações numéricas do 1º grau, equações literais do 1º grau e sistemas de equações. As expressões algébricas deixaram de ser estudadas anteriormente, como pré-requisito para as equações, para passarem a ser introduzidas a partir do próprio estudo das equações. A intenção é, certamente, a de motivar o estudo das expressões algébricas, um tema reconhecidamente árido e pouco interessante, através do estudo das equações.

O livro de Augusto José da Cunha parece estar dirigido a um leitor adulto. Os outros três livros estão claramente dirigidos a um público de jovens adolescentes, preocupando-se em motivar os alunos, seja pela introdução de referências históricas (Jorge



Calado), seja por se partir de problemas (Jorge Calado, António Costa e Alfredo Osório e M<sup>a</sup> José Soares), seja ainda pela introdução de figuras meramente decorativas (M<sup>a</sup> José Soares).

Todos os livros apresentam uma primeira parte, onde prepararam o terreno, e uma segunda parte onde apresentam explícita ou implicitamente os princípios de equivalência e/ou as regras para a resolução de equações. A grande diferença está no modo mais formal como isso é feito no livro de Cunha, ao contrário dos outros três livros que partem sempre de exemplos. Note-se também que, ao contrário de todos os outros livros, o de Costa e Osório, na linha da Matemática moderna, não introduz os princípios de equivalência, procurando, numa fase inicial, resolver as equações atendendo à definição das operações numéricas e suas propriedades. Com base no trabalho feito nessa fase inicial, apresenta orientações e formula regras práticas para a resolução de equações.

A noção de identidade joga um papel importante nos livros de Cunha e Calado. Desapareceu de cena com o livro de Costa e Osório e continua ausente no de Soares. A noção de igualdade aparece nos livros de Cunha, Calado, Costa e Osório e só não aparece no de Soares. O livro de Calado é o único que faz referência a um processo gráfico de resolução de equações do 1º grau (dada a imposição do programa oficial então em vigor). Este processo em si mesmo não será muito prático, justificando-se apenas como preparação para a representação gráfica de funções e sistemas de equações.

A natureza do texto muda profundamente com a época. De um texto coeso, revelando grande preocupação de escrita, de Cunha e Calado, passa-se para um texto mais informal de Costa e Osório, onde se interpela directamente o leitor, e daí para um texto fragmentado e disperso em Soares. Os três primeiros livros (Cunha, Calado, Costa e Osório) visam o leitor-aluno. O livro de Soares parece visar tanto o aluno como o professor. Na verdade, no prefácio inclui indicações para ambos, e a organização das secções e subsecções parece decorrer mais de uma lógica de organização de aulas do que propriamente de temas de leitura.

Do ponto de vista da apresentação da Matemática como uma disciplina com conexões múltiplas, internas e externas, o livro mais conseguido é sem dúvida o de Soares. Não só contém problemas que remetem para situações do quotidiano como contém questões que estabelecem relações explícitas das equações com a Geometria. Do ponto de vista da variedade das tarefas propostas, este livro também é o mais interessante, sendo o único que introduz questões que envolvem a tradução de situações do quotidiano em linguagem algébrica, ao lado das questões de “calcula” e “resolve”.

Em resumo, a evolução da apresentação do tema das equações mostra transformações consideráveis no sentido de tornar este conceito compreensível e atractivo para os alunos. A preocupação com a simplificação e a atractividade da mensagem levou, no entanto, a um estilo de escrita de cunho extremamente esquemático e a uma profusão de elementos decorativos distractores, cujas consequências seria interessante estudar mais profundamente. O facto do livro já não se dirigir só ao aluno, mas também ao professor, resultado das estratégias comerciais (se o livro não se dirigir ao professor, não se vende, e não chega ao aluno...), é também um factor que, muito provavelmente, pesa nas decisões quanto à sua concepção e produção e, como é inevitável, nos seus efeitos junto do aluno que o usa para estudar Matemática.

Do ponto de vista da investigação histórica, seria interessante estudar em que medida estes manuais são representativos dos manuais portugueses das diversas épocas e que períodos históricos se podem demarcar relativamente ao ensino das equações do 1º grau, tal como de resto de outros conceitos matemáticos importantes. Outra questão que seria interessante analisar, é a relação entre a evolução verificada em Portugal e noutros países, neste e noutros conceitos importantes da currículo de Matemática, à luz dos grandes movimentos de re-orientação do ensino desta disciplina.

### Referências

- Calado, J. J. G. (1952). *Compêndio de Álgebra*. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco
- Costa, A. A., & Anjos, A. O. (s.d., 1970?). *Compêndio de Matemática*. Porto: Porto Editora.
- Cunha, A. J. (1887). *Elementos de Álgebra*. (5ª edição). Lisboa: Livraria de António Maria Pereira.
- Sierra-Vásquez, M., González-Astudillo, M. T., & López-Esteban, C. (2002). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 14.
- Silva, J. S. (1964). *Compêndio de Matemática* (texto piloto policopiado). Lisboa: Ministério da Educação.
- Soares, M. J. (1992). *Compêndio de Matemática*. Lisboa: Texto Editora.

**João Pedro da Ponte** - Departamento  
de Educação, Faculdade de Ciências da  
Universidade de Lisboa  
**Endereço:** Edifício C1 - Campo Grande  
Universidade de Lisboa  
**E-mail:** jpponte@mail.fc.ul.pt