

O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL DOS ALUNOS DO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO¹

Sara Costa

*Escola E. B. 2, 3 Gaspar Correia, Portela
Escola do Hospital de Santa Maria, Lisboa*

João Pedro da Ponte

Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

INTRODUÇÃO

São muitos os fenómenos da realidade que podem ser descritos por modelos de proporcionalidade e, por isso, o apelo à utilização do raciocínio proporcional, é frequente no nosso dia-a-dia. Além disso, o raciocínio proporcional é fundamental na resolução de problemas de muitas áreas do saber (Cramer, Post & Behr, 1989). Trata-se de um tópico que permite estabelecer conexões com o quotidiano dos alunos, com outros tópicos matemáticos e com outras disciplinas e que constitui um elemento importante da iniciação dos alunos ao pensamento algébrico (Ponte, 2006). Há já vários anos que este tópico tem estado na base de estudos nos campos da Psicologia e da Educação Matemática, o que evidencia a sua importância dentro e fora da Matemática.

Baseando-se no facto das crianças usarem este raciocínio desde muito cedo, Resnick e Singer (1993) defendem que o seu desenvolvimento não depende do trabalho feito na escola, seja este formal ou informal, mas sim do conhecimento baseado na experiência diária da criança. No entanto, a experiência da primeira autora do artigo, tal como a de muitos outros professores, revela existirem grandes dificuldades por parte dos alunos do 6.º ano na realização de tarefas que implicam o uso do raciocínio proporcional. As dificuldades dos alunos são notórias na interpretação de enunciados das tarefas (não conseguindo muitas vezes distinguir as situações de proporcionalidade directa das que não o são) e na sua tendência para mecanizar algoritmos sem os compreender e para os aplicar mesmo em situações em que não são adequados (como, por exemplo, em questões envolvendo a comparação de duas razões).

¹ Artigo realizado no âmbito do Projecto IMLNA-Improving Mathematics Learning in Numbers and Álgebra, apoiado pela FCT (Contrato nº PTDC/CED/65448/2006). Informações adicionais sobre a metodologia do estudo podem ser vistas em Costa (2007).

Outro ponto que nos tem feito reflectir é a distância que os alunos tendem a criar entre a resolução das tarefas escolares e a resolução das tarefas com que se deparam fora da escola. Ou seja, em situações do seu dia-a-dia, os alunos fazem uma aplicação de estratégias intuitivas, ao passo que, na escola, tendem a usar estratégias formais, muitas vezes sem compreenderem o que estão a fazer, aplicando-as quando não devem, ou aplicando-as mal, sem recorrerem ao seu conhecimento intuitivo e errando com frequência as tarefas propostas.

Deste modo, o estudo aqui apresentado tem por principal objectivo analisar o raciocínio proporcional dos alunos antes e após o ensino formal da proporcionalidade directa. Procuramos responder às seguintes questões de investigação: (i) Que estratégias são usadas pelos alunos do 6.º ano na resolução de tarefas que envolvem relações proporcionais, antes e após o ensino formal da proporcionalidade directa? Em que tarefas os alunos têm tendência para aplicar procedimentos de cálculo da proporcionalidade? (ii) Que dificuldades apresentam os alunos? Em que momento da resolução da tarefa é que surgem? e (iii) De que modo os alunos distinguem situações onde existe proporcionalidade directa das situações onde esta não existe?

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES DOS ALUNOS

O raciocínio proporcional. Lamon (2005) nota que “raciocínio proporcional” não é sinónimo de “proporcionalidade”. Para esta autora, o raciocínio proporcional é a condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. Esta autora indica que o conceito de raciocínio proporcional vai muito além de mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar, de forma consciente, as relações entre quantidades, evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais. O raciocínio proporcional implica a compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (invariância) e a noção de que estas grandezas variam em conjunto (covariância). Segundo a autora, uma das tarefas mais difíceis para as crianças é compreender a natureza multiplicativa das situações proporcionais, o que requer alguma maturidade matemática para compreender a diferença entre adicionar e multiplicar e os contextos em que cada uma se pode usar. Para Singer, Kohn e Resnick (1997) outro factor que influencia a compreensão matemática da criança é a compreensão intuitiva do mundo, ou seja, a experiência diária no seu mundo físico e social.

Existem várias categorizações para as tarefas que envolvem proporcionalidade. Por exemplo, Lesh, Post e Behr (1988) distinguem sete tipos de tarefa:

- *Problemas de valor omissa*, em que são dados três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto;
- *Problemas de comparação*, em que são dadas duas razões e pede-se para indicar qual é maior, menor ou se são iguais;

- *Problemas de transformação*, em que é necessário alterar valores de uma certa quantidade para comparar depois duas razões ou alterar uma quantidade de forma a obter uma igualdade entre duas razões (estas tarefas são pouco utilizadas devido à sobrevalorização da “determinação do valor de x ”);
- *Problemas de valor médio*, em que são dados dois valores e é pedido para encontrar o terceiro que se repete, por exemplo, como meio;
- Proporções que envolvem a *conversão entre razão, taxa e fracções*, ou seja, em que os valores são representados numa determinada forma e se pede a determinação dos restantes valores;
- Proporções que envolvem *unidades de medida* assim como números, tendo em conta que existem relações estabelecidas entre unidades de medida como, por exemplo, km/hora;
- Problemas de *conversão entre sistemas de representação*, nos quais, a partir dos dados representados num determinado sistema, se pede a sua representação noutro sistema mantendo a relação entre si.

Para estes autores, o professor deve propor aos seus alunos problemas de vários tipos. A diversificação das tarefas é necessária para que os alunos desenvolvam a necessária flexibilidade no seu raciocínio proporcional.

Estratégias dos alunos. Vários estudos analisaram as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional. Alguns deles têm mostrado que a capacidade de raciocinar proporcionalmente surge nos alunos antes do ensino formal da proporcionalidade directa. Por exemplo, Spinillo (1994), na descrição do seu estudo com crianças entre os 6 e os 8 anos, indica que estas conseguiram fazer vários julgamentos proporcionais apoiados no referencial de metade.

Pittalis, Christou e Papageorgiou (2003) analisaram as estratégias de 15 alunos do 6.º ano, antes do ensino formal das proporções, e consideram que a utilização correcta de determinadas estratégias depende de factores como o tipo de tarefa e a relação numérica entre os dados. Assim, quando existe uma relação inteira entre os elementos da mesma grandeza tende a haver a aplicação de uma estratégia relacionando esses dados – relação interna (*within relation*) – recorrendo ao raciocínio escalar; quando a relação inteira é entre elementos de grandezas diferentes, tende a haver outro tipo de estratégia – relação externa (*between relation*) – recorrendo ao raciocínio funcional. Vergnaud (1988) e Singer, Kohn e Resnick (1997) consideram que as estratégias dominantes baseiam-se em raciocínios escalares porque muitos problemas de razão e proporção se podem resolver por adições sucessivas.

Outras estratégias muito observadas em vários estudos são o uso de taxa unitária, na qual os alunos tentam responder à questão “quantos para um?” e do produto cruzado com recurso à regra de três simples ou à propriedade fundamental das proporções. Para Ben-Chaim, Fey,

Fitzgerald, Benedetto e Miller (1998), a estratégia da taxa unitária é a mais intuitiva, sendo baseada em experiências do dia-a-dia, ao contrário dos algoritmos que alunos mais velhos têm tendência a usar mesmo quando não se trata de relações directamente proporcionais. Segundo Silvestre (2006), o que leva o aluno a optar por uma certa estratégia parece depender da interpretação que ele faz do problema, do seu conhecimento sobre os números e das relações que consegue estabelecer de imediato. Assim, as estratégias não parecem ser hierarquizadas ao ponto de revelar ou não um raciocínio proporcional mais sofisticado e muito está ainda por investigar a este nível.

Dificuldades dos alunos. Mesmo após uma leccionação do tópico da proporcionalidade directa, muitos professores ficam com a sensação de que os seus alunos têm dificuldades em usar o raciocínio proporcional. Na origem destas dificuldades alguns autores dão mais importância aos factores inerentes às tarefas – contexto e estrutura – e outros aos factores relacionados com os alunos. Assim, Tourniaire e Pulos (1985) assinalam a presença de misturas, a existência de variáveis discretas ou contínuas, a familiaridade e a possibilidade de utilização de materiais manipuláveis como factores inerentes ao contexto que influenciam o desempenho dos alunos. Como factores relacionados com a estrutura da tarefa, apontam a presença de razões inteiras, a localização do valor omissa e a complexidade dos dados utilizados. Cramer e Post (1993) também referem que o contexto, tal como a natureza das relações numéricas, influencia o grau de dificuldade do problema e apontam os problemas de escalas como os que trazem mais dificuldades.

Também Vergnaud (1988) considera que a complexidade das tarefas varia consoante os valores numéricos apresentados (números decimais inferiores a 1, razões escalares “pequenas” e “grandes”,² coeficientes constantes pequenos ou grandes, numerais decimais, fracções próprias) e os contextos (preços, produção, consumo, velocidade, geometria, densidade). Na mesma perspectiva, Hart (1988) refere que, quando se propõe uma tarefa aos alunos, deve ter-se em conta os números usados, uma vez que estes têm tendência a usar o seu sentido do “parece certo”, resistindo, por vezes, à manipulação de números que lhes são pouco familiares.

Alguns dos estudos dão indicações sobre o ensino e o desenvolvimento da capacidade de utilização do raciocínio proporcional. Segundo Spinillo (1996), o trajecto correcto para uma verdadeira aprendizagem e desenvolvimento deste raciocínio deve partir do informal e do intuitivo para a formalização e o uso de algoritmos. Cramer e Post (1993) sugerem que se devem utilizar várias estratégias de resolução das tarefas durante as aulas, tendo como ponto de partida as estratégias mais intuitivas. Estes autores sublinham ainda a importância dos professores fazerem variar o tipo de relação numérica utilizada bem como o contexto das tarefas. No entanto, apesar de haver vários estudos sobre o que origina dificuldades nos alunos ao resolverem problemas que envolvem relações proporcionais, a verdade é que é preciso saber melhor como as evitar e também o que fazer para que todos os alunos consigam ultrapassar estas dificuldades e obter sucesso na aprendizagem deste tópico.

² “Bad” numbers e “bad” ratios, no original.

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Atendendo ao objectivo e às questões enunciadas, o estudo baseou-se numa metodologia qualitativa e interpretativa. A investigação decorreu numa escola de Lisboa com alunos de uma turma de 6.º ano, no ano lectivo de 2006/07. A turma era constituída por 28 alunos (16 rapazes e 12 raparigas), com idades entre os 10 e os 14 anos, que incluíam um aluno que estava a repetir o 6.º ano e quatro alunos com necessidades educativas especiais.

Antes da aplicação dos instrumentos de recolha de dados, a primeira autora começou a assistir a algumas aulas para que os alunos não a vissem como uma pessoa estranha na sala de aula. Durante este período, surgiu a hipótese de trabalhar colaborativamente com a professora (Boavida & Ponte, 2002), numa relação não hierárquica benéfica para ambas, uma vez que havia afinidade na forma de trabalhar, nas relações pessoal e profissional (já anteriormente existentes), e também em diversos objectivos comuns. Assim, ambas actuaram como professoras e investigadoras. Perante a turma, a professora tinha o papel principal e a primeira autora apoiava os alunos sempre que estes trabalhavam de forma autónoma e a solicitavam. Perante a investigação, a primeira autora teve o papel central e a professora trocou muitas vezes impressões com ela sobre o desempenho dos alunos, reflectindo sobre os dados recolhidos, que teve em conta na planificação e condução das aulas.

Antes da leccionação desta unidade a primeira autora e a professora tiveram várias conversas informais e uma longa reunião. A professora propôs a planificação sobre a qual reflectiram em conjunto e pensaram em algumas tarefas, tendo sempre como ponto de partida o que os alunos já sabiam, procurando valorizar as suas próprias estratégias de resolução de problemas para uma construção mais formal de conhecimentos. Tentaram que as formas de trabalho dos alunos se mantivessem idênticas às usadas até então, não quebrando a dinâmica estabelecida na turma. Assim, as tarefas foram realizadas individualmente ou aos pares e, posteriormente, apresentadas e discutidas em grande grupo. Foi feita uma utilização reduzida do manual adoptado na escola, recorrendo sobretudo a fichas de trabalho com tarefas diversificadas (problemas, exercícios e tarefas de exploração) escolhidas de outros manuais e de provas de aferição.

Durante as aulas viveu-se sempre um clima agradável, em que todos os alunos procuravam participar, expondo as suas estratégias e dificuldades e tentando perceber as dos colegas. O facto de ser o segundo ano que estavam com esta professora ajudou-os a adquirir hábitos de argumentação e de expressão das suas ideias e raciocínios, tanto oralmente como por escrito. Após cada uma das aulas foi feita uma reflexão conjunta entre a primeira autora e a professora.

Para a recolha de dados foi feito um teste inicial (anexo 1) para identificar as estratégias dos alunos antes do ensino formal do tópico em tarefas de dois tipos – comparação numérica e valor omissivo – e numa tarefa adaptada do estudo de Lamon (1993), destinada a averiguar se os alunos detectavam situações em que existe proporcionalidade directa. Para cada tipo de tarefa, variava um elemento perturbador: nos problemas de comparação numérica, num caso usavam-

se numerais decimais e noutro não; nos problemas de valor omissivo, variava a posição do valor desconhecido. Após a abordagem do tópico, foi realizado outro teste à turma com uma estrutura idêntica ao teste inicial, de forma a permitir uma comparação dos desempenhos dos alunos, as suas estratégias e dificuldades. Este constituiu também o teste final de avaliação da unidade elaborado pela professora (anexo 2) e incluía ainda outros tópicos anteriormente abordados (Estatística e Números Racionais – expressões numéricas). Foram ainda feitas entrevistas a seis alunos seleccionados pelos critérios de serem bons informantes sobre a sua forma de raciocinar, terem desempenhos diferentes na disciplina de Matemática: Carla e Marta são alunas de desempenho elevado, Leandro e Carlos, médio, e Jorge e Marina, fraco. Nestas entrevistas as tarefas propostas eram do mesmo tipo das do teste inicial.

Após a transcrição de cada entrevista foi feito o tratamento de dados, procurando descrever e interpretar o raciocínio usado pelos alunos tendo em vista analisar as suas estratégias e dificuldades. Foi estabelecida uma categorização tendo em conta as estratégias e representações escritas utilizadas pelos alunos na resolução de cada tarefa. Como as estratégias encontradas não se enquadravam completamente em nenhuma das categorizações existentes na literatura, foi produzida uma nova categorização, combinando as propostas de vários autores. Optou-se por categorizar as estratégias utilizadas pelos alunos tendo em conta a sua natureza *aditiva* ou *multiplicativa* e, neste último caso, funcionais ou de produto cruzado (regra de três simples).

Também foram objecto de análise as dificuldades reveladas pelos alunos, que foram classificadas tendo em conta o plano global de resolução de problemas de Pólya (1945), ou seja, localizando em que momento da resolução da tarefa é que o aluno encontrou obstáculos. Assim, foram considerados os seguintes momentos: *compreensão/interpretação e construção de um plano para resolução* do problema; *execução* do plano, que inclui, caso se aplique, os cálculos a realizar; e *reflexão* sobre a solução obtida. Por outro lado, procurou-se identificar os possíveis elementos perturbadores que desencadearam dificuldade nos alunos em determinado momento da resolução da tarefa. Nas questões em que os alunos tinham de justificar se as situações eram de proporcionalidade directa ou não, também se analisou o conteúdo e a consistência da justificação apresentada. Assim, surgiram várias categorias e subcategorias (Quadro 1).³

³ Informações adicionais sobre a metodologia do estudo podem ser vistas em Costa (2007).

Quadro 1 – Categorias de análise dos dados

| Estratégias / representações | | Dificuldades |
|---|---|---|
| Correctas | Incorrectas | |
| <p>Multiplicativas:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Produto cruzado (regra de três simples / propriedade fundamental das proporções); ▪ Procedimento escalar (dentro do mesmo espaço de medida); ▪ Procedimento funcional (entre espaços de medida diferentes. Ex. Taxa unitária); <p>Aditivas (Construção - <i>Building-up</i>):</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ A partir de adições / subtracções sucessivas. | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Diferença constante; ▪ Construção incorrecta; ▪ Soma constante; ▪ Raciocínio incompleto. | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Compreensão / interpretação / construção do plano de execução (Relação errada de dados, utilização de parte dos dados); ▪ Execução do plano (erro de cálculo); ▪ Reflexão sobre a solução obtida (pouco consistente/insatisfatória); ▪ Não classificada. |
| <p>Justificação para identificação de situações de proporcionalidade directa:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Baseadas em estratégias correctas; ▪ Baseadas em situações práticas reais; ▪ Justificação insatisfatória / pouco consistente; ▪ Não justifica. | | |

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL ANTES DO ENSINO FORMAL

De um modo geral, os alunos tiveram um desempenho bastante satisfatório nas tarefas do teste inicial. Nas suas respostas, foi notório que eles já estavam habituados a explicar as suas estratégias. Mesmo os alunos que erraram as questões colocadas tiveram essa preocupação, sendo muito poucos os que deixaram a folha em branco.

Valor omissio. Os resultados mostram que, antes de uma abordagem formal da proporcionalidade directa, os alunos optaram maioritariamente nestas tarefas por estratégias aditivas. Esta tendência foi mais acentuada no caso da tarefa em que o valor omissio está posicionado como meio:



Um automóvel que circula a uma velocidade constante demora 10 minutos a percorrer 15 km. Quanto tempo leva para percorrer 90 km?

Explica o teu raciocínio.

10 m - 15 km
20 m - 30 km
30 m - 45 km
40 m - 60 km
50 m - 75 km
60 m - 90 km

60 m = 1 hora

R: Leva 1 hora para percorrer 90 km.

Na tarefa de valor omissivo posicionado como extremo as estratégias variaram mais. Assim, houve alunos que pareceram utilizar procedimentos aditivos:

Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas por cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com seis rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas? Mostra como chegaste à tua resposta.




Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.


2 R. brancas - 4 R. amarelas
3 R. br. - 6 Rosas am.
4 R. br. - 8 R. am.
5 R. br. - 10 R. am.
6 R. br. - 12 Rosas amarelas

R: Tinha de colocar 12 Rosas amarelas.


Também houve alunos que usaram procedimentos multiplicativos, uns funcionais e outros escalares, como este:



brancas



amarelas

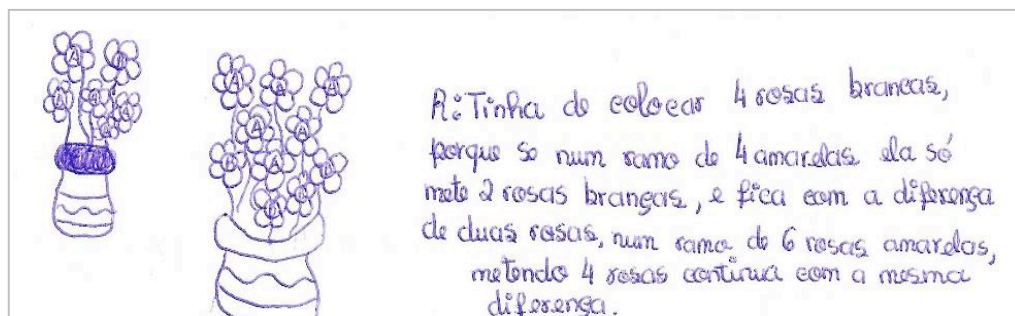


brancas

2 Rosas brancas $\times 3 = 6$ Rosas brancas
4 Rosas amarelas $\times 3 = 12$ Rosas amarelas

A existência de estratégias mais variadas nesta segunda tarefa pode ter sido incentivada pela sua estrutura numérica, dado que alguns dos números que nela surgiam podiam identificar-se facilmente como múltiplos de outros números.

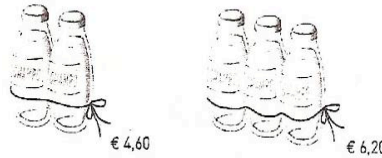
As dificuldades apresentadas pelos alunos neste tipo de tarefa também foram variadas. Umas estão ligadas à concepção do plano de resolução, ou seja, decorrem do estabelecimento de relações incorrectas entre os dados, nomeadamente, mantendo constante a diferença entre os valores. Eis um exemplo:



Outras dificuldades evidenciam-se na execução dos cálculos, que são incompreensíveis ou errados.

Comparação numérica. Nestas tarefas, as estratégias dominantes foram as multiplicativas uma vez que, tal como seria de esperar, os alunos procuraram relacionar cada par de valores e

Num supermercado estão a fazer uma promoção em que vendem champôs em conjuntos de dois ou de três. Indica qual é a escolha mais económica. Diz como chegaste a essa conclusão.



R: A mais económica é o conjunto de três, porque:

se compramos $3 \times 2 = 6$ champôs $= 6,20 \times 2 = 12,40 \text{ €} \rightarrow$ fica mais barato.

mas, se compramos $2 \times 3 = 6$ champôs $= 4,60 \times 3 = 13,80 \text{ €} \rightarrow$ fica mais caro.

não obter certos valores a partir de outros. Eis um exemplo:

Outra estratégia comum foi a da razão unitária, como no caso seguinte em que o aluno tentou encontrar o preço de cada champô:

$$\begin{array}{r}
 4,60 \quad \overline{) 2} \\
 06 \quad \underline{2,30} \\
 00 \\
 6,20 \quad \overline{) 3} \\
 0,20 \quad \underline{2,06} \\
 2
 \end{array}$$

Conjunto de dois
champôs = $4,60 : 2 = 2,30$ cada um.

Conjunto de três
champôs = $6,20 : 3 = 2,06$ cada um

R: A escolha mais económica
é o conjunto de três champôs.

O facto de uma das tarefas envolver numerais decimais não prejudicou o desempenho dos alunos. No entanto, o contexto da tarefa que só envolvia números inteiros revelou-se um obstáculo, pois os alunos mostraram dificuldade em lidar com a situação de mistura envolvendo grandezas contínuas (com medidas nas unidades grama e decilitro). É também de realçar a sua dificuldade em validar e justificar as suas respostas nesta questão, tendo-se apoiado, muitas vezes, em argumentos pouco matemáticos, não relacionando as duas grandezas:

Repara na imagem. Que chá, A ou B, é o mais doce?
Justifica a tua resposta.

10g 45g

3dl de chá
10g de açúcar 15dl de chá
45g de açúcar

$10g < 45g$

R: É o chá B. Porque tem mais açúcar do que o chá A.

Outro exemplo de resposta:

R: É o chá A, porque o jarro do chá é mais pequeno
e assim o chá não se espalha tanto.

Identificação de situações de proporcionalidade. Os alunos não mostraram grande dificuldade nestas tarefas. Apoiaram-se em situações do seu dia-a-dia, como no exemplo seguinte:

- o Se uma rapariga chega à escola em 10 minutos duas levam 20 minutos.

Falso, porque se uma rapariga leva 10 m a chegar à escola, duas raparigas com o mesmo andar também levam 10 m a chegar à escola.

Quando relacionaram dados numéricos, alguns alunos usaram estratégias aditivas e outros seguiram estratégias multiplicativas, com procedimentos escalares. É de destacar que a grande maioria respondeu a estas questões e justificou as suas respostas.

Verifica-se assim que, mesmo antes do ensino formal da proporcionalidade directa, a grande maioria dos alunos conseguiu realizar correctamente tarefas que pressupõem a utilização de raciocínio proporcional. Em muitos casos usaram estratégias aditivas, mas em vários outros casos usaram já estratégias multiplicativas. Assim, tal como é referido por Resnick e Singer (1993) e Spinillo (1994), este raciocínio assume já um desenvolvimento significativo antes da leccionação deste tópico na escola.

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL DEPOIS DO ENSINO FORMAL

Vejamos agora o desempenho dos alunos no teste de avaliação final e nas entrevistas realizadas depois da conclusão da unidade de ensino sobre proporcionalidade.

Valor omissa. Nas questões de valor omissa do teste final alguns alunos utilizaram estratégias aditivas de forma correcta. No entanto, a maioria utilizou estratégias multiplicativas, em especial a regra de três simples. Por exemplo:

3. O grupo de amigos do Pedro foi à Pizaria na 5.ª feira passada. Pediram 3 pizzas para 9 pessoas, para que todos comessem igual quantidade de piza. Na próxima 5.ª feira voltarão à Pizaria, mas serão 15 pessoas. Quantas pizzas têm de pedir para que cada um coma a mesma quantidade da semana anterior?

9 pessoas — 3 pizzas

15 pessoas — x pizzas

$$x = \frac{3 \times 15}{9} = \frac{45}{9} = 5 \text{ pizzas.}$$

Cada um
come $\frac{1}{3}$ da piza



R: Para a semana têm de pedir 5 pizzas.

A questão que envolvia valor omisso posicionado como meio revelou-se mais fácil, talvez por ter um contexto mais próximo dos alunos do que a questão que envolvia escalas. No entanto, de um modo geral, este tipo de questões não levantou grandes dificuldades aos alunos. As que surgiram disseram respeito à execução do plano traçado, consistindo em erros de cálculo, ou envolveram a não execução da tarefa.

Na entrevista, uma das questões em que o valor omisso se encontrava como meio era a seguinte:



4. O Ricardo está à espera que a impressora acabe de fazer o seu “trabalho”. Reparou que está lenta: levou 2 minutos para fazer um trabalho de 8 páginas. Quanto tempo levará para imprimir, à mesma velocidade, as 12 páginas que faltam?

Na sua resolução, Carlos e Carla utilizaram a regra de três simples. No entanto, é de notar que Carlos só o fez depois de tentar utilizar uma estratégia aditiva, a construção (*building-up*):

Carlos – Aqui 8 mais 4 vai dar 12 páginas se tivesse 4 minutos para 8 páginas aqui podia dar 12 minutos para 12 páginas, era 1 para cada... Como aqui é 2, acho que vai ficar 4 minutos para 12 páginas... [registra] 8 páginas 2 minutos dá 10.

Professora – Portanto estás a somar...

Carlos – [olha para o registo] Já sei como é que é! [apaga] 8 páginas menos 12 páginas é igual a 4 como aqui há 2 minutos aqui pode haver 4 minutos ou então a regra de três simples!

Professora – Faz lá mas não apagues!

Carlos – 8 páginas, 2 minutos depois 12 páginas, x minutos, agora 12 vezes 2 e depois aqui o x é igual a 12 vezes 2 a dividir por 8... 12 vezes 2 vai dar [usa calculadora] 24 e depois a dividir por 8 dá 3. Portanto, 3 minutos para 12 páginas.

Professora – Então mas não foi isso que deu ali em cima pois não? Em qual é que vais confiar?

Carlos – Nesta. [aponta para a regra de três simples]

Professora – Porquê?

Carlos – Porque aqui fiz os cálculos mais raciocinados do que aqui.

Professora – O que achas que ali falhou?

Carlos – ‘Tar a somar páginas e dar minutos...

Carla já tinha aplicado a regra de três simples no teste inicial. Afirmou mesmo que conhecia este procedimento quando ingressou no 2.º ciclo:

Carla – Porque no ATL onde eu ando... *Prontos...* É uma maneira que eu faço... Porque eu já não me lembrava mas lá no ATL disseram-me que havia esta regra... Eu já não me lembrava mas sabia como é que se fazia e pronto comecei a utilizar.

Professora – Sabias antes do ATL?

Carla – Sabia! Na professora do... Do 1.º ao 4.º...

Professora – E falaram desta regra?

Carla – Sim utilizámos mas não era assim muito usada... Porque não era assim tão difícil!

Handwritten calculation showing the rule of three for printing pages:

$$\begin{array}{l} 8 \text{ páginas} \text{ — } 2 \text{ minutos} \\ 12 \text{ páginas} \text{ — } x \text{ minutos} \end{array}$$
$$x = \frac{12 \times 2}{8} = \frac{24}{8} = 3 \text{ minutos}$$

Responderá 3 minutos para imprimir 12 páginas.

Os restantes alunos utilizaram estratégias aditivas, através de procedimentos de construção. Por exemplo:

Leandro – Se 8 páginas foram 2 minutos, 16 páginas iriam ser 4 minutos [silêncio] 4 páginas num minuto, 2 em 8... 3 minutos! Porque... 8 páginas a dividir pelos 2 é igual a 4, não é? Mais... Dá 4 não é? 8 mais 4 é igual a 12 que é o número de páginas. Se 2 minutos é 8 páginas, 1 minuto é 4 páginas, logo 12... Não [apaga] x que é igual a 3 minutos é 12 páginas. Primeiro fui ver quanto é que demorava 1 minuto, quantas é que fazia... Então... Depois deu 4... 8 mais 4 dá 12, se 4 for 1 minuto, 2 é 8 mais os 4 que é mais um minuto dá 3... 12 páginas, 3 minutos.

É de notar que a regra de três simples não foi muito usada pelos alunos nesta questão da entrevista, apesar de ser conhecida por todos e ter sido bastante utilizada na questão idêntica do teste final.

Na questão seguinte da entrevista o valor omissivo apresentava-se como meio:

6. Na hora do lanche, Ricardo lembrou-se de uma receita que a avó fazia sempre. Foi ver os ingredientes, para pedir à mãe para o fazer...

200 g de açúcar;
250 g de farinha;
4 ovos;
50 g de manteiga



A mãe quis fazer um bolo maior e resolveu usar os 6 ovos que tinha em casa. Indica as quantidades dos outros ingredientes que vai ter de usar, para que o bolo tenha o mesmo sabor.

Na resolução desta tarefa, quatro dos alunos usaram como estratégia a regra de três simples, mesmo quando inicialmente seguiram outra estratégia:

| | | |
|--------------------------|------------------------------|--|
| $4:4 = 1$ | $4 \text{ — } 250 \text{ g}$ | $? \frac{6 \times 250}{4} = \frac{1500}{4} = 375 \text{ g} - \text{farinha}$ |
| $50:4 = 12,5 \text{ g}$ | $6 \text{ — } ? \text{ g}$ | |
| $250:4 = 62,5 \text{ g}$ | $4 \text{ — } 200 \text{ g}$ | $? = \frac{6 \times 200}{4} = \frac{1200}{4} = 300 \text{ g} - \text{de açúcar}$ |
| $200:4 = 50 \text{ g}$ | $6 \text{ — } ? \text{ g}$ | |
| | $4 \text{ — } 50 \text{ g}$ | $? = \frac{6 \times 50}{4} = \frac{300}{4} = 75 \text{ g} - \text{de manteiga}$ |
| | $6 \text{ — } ? \text{ g}$ | |

R: Deverá utilizar 375g de farinha, 300g de açúcar e 75g manteiga

Como se verifica pela resposta de Marta, a sua estratégia inicial não foi a regra de três simples. Começou por calcular a quantidade de cada ingrediente para cada ovo (lado esquerdo da imagem), ou seja, utilizou um procedimento que envolvia a taxa unitária e só depois optou pela regra de três simples, por considerá-la mais rápida:

Professora – Vou só perguntar uma coisa... Por que é que abandonaste esta estratégia? Estava errada?

Marta – Não, é que é mais fácil andar a fazer assim [regra de três simples], se fizesse assim [estratégia inicial] demorava mais tempo.

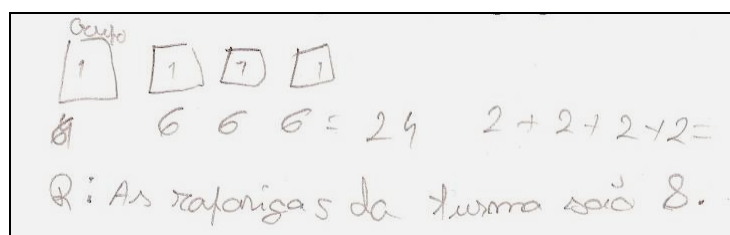
Nesta tarefa, a regra de três simples foi o procedimento mais usado pelos alunos que a conseguiram resolver. No entanto, uma das alunas utilizou também uma estratégia aditiva com sucesso. Só um aluno (Jorge) apresentou dificuldade no estabelecimento de relações entre os dados.

Logo no início da entrevista, foi proposta aos alunos uma tarefa de valor omissivo em que este se apresenta como extremo:

1. Na última aula estiveram a fazer um trabalho de grupo. Ao todo, na turma do Ricardo, a professora conseguiu formar 4 grupos e todos eles tinham 4 rapazes e 2 raparigas. Sabendo que a turma tem 24 alunos, quantas são as raparigas?

Sendo esta uma situação familiar para os alunos, todos conseguiram responder, chegando ao valor correcto. As formas de resolução imediatas basearam-se em esquemas de pensamento

muito simples, possivelmente, associados a uma visualização do “que se passava” na formação dos grupos na sala de aula – adições sucessivas do mesmo valor (ou multiplicação) representadas ou por uma tabela ou simplesmente pela indicação da operação. Por exemplo, Jorge fez o seguinte:



Grupo

1 1 7 1

6 6 6 = 24 2 + 2 + 2 + 2 =

Q: As raparigas da turma são 8.

Apesar de usarem estratégias aditivas ou estratégias escalares muito simples, os alunos mostraram também saber aplicar outras estratégias mais formais quando lhes foi solicitada outra forma de resolução.

As suas dificuldades centraram-se na compreensão do problema, duas alunas porque ignoraram dados existentes no enunciado e outro aluno porque teve dificuldade em relacionar os dados, ou seja, em perceber o problema.

A última tarefa da entrevista continha duas questões de mistura. Na primeira, os alunos tinham de encontrar o valor omitido situado como extremo:



7. Para acompanhar o bolo Ricardo fez sumo de laranja.

Este foi feito a partir de sumo concentrado. Repara no rótulo.

- a) Que quantidade de água deve usar quando coloca três copos de sumo concentrado?

Nesta questão todos os alunos conseguiram chegar à resposta correcta, utilizando, no entanto, estratégias diferentes, umas aditivas e outras multiplicativas. Quatro alunos utilizaram um procedimento de construção, ou seja, viram que 3 é a soma de 1,5 com 1,5 e, a partir daí, fizeram o mesmo com a água, ou seja, somaram 9 com 9, obtendo os 18 copos:

Marina – [silêncio] Precisamos de 18 copos de água...

Professora – Como é que fizeste?

Marina – Fiz 9 copos mais 9 copos.

Professora – E porquê 9 copos...

Marina – Porque 1,5 mais 1,5 dá 3... Aqui 9... Pensei assim 1,5 para 9, outros 1,5 dá para 9 que é igual a 18 copos.

Jorge evidenciou dificuldades, por não conseguir “visualizar” a situação:

Jorge – [relê o rótulo] Diluir um copo e meio de concentrado em 9... Ah??? Ah são daqueles pacotes... Mas um copo e meio em 9 copos de água [relê] o sumo concentrado é este? [professora explica o processo de produção deste tipo de sumo] Ah! Estava a pensar que isto aqui já estava junto com água e o pozinho... E já... Isto é... Ah pensava que era... Ah tá!... Então se tivermos um copo para aí deste tamanho se meter metade disso... Não vai dar para meter 9 copos de água.

Professora – Pois... Imagina que vais fazer este sumo num jarro grande.

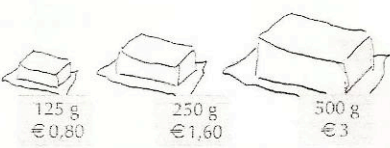
Jorge – Ah... Um jarro... Ah... Então se metermos um jarro e metermos meio de copo concentrado como ‘tá aqui a dizer... Não... Um copo e meio... Temos de meter nove copos de água lá dentro e se metermos três copos de sumo concentrado...

Marta e Carla usaram, novamente, a regra de três simples. Assim, todos os alunos conseguiram resolver com sucesso a tarefa proposta, embora usando estratégias diferentes. Contudo, surgiram dificuldades na compreensão do problema, especialmente por parte de Jorge, talvez por não ter familiaridade com este contexto.

Comparação numérica. Nas questões de comparação numérica do teste os alunos usaram sobretudo estratégias multiplicativas com procedimentos escalares. No entanto, também surgiram estratégias aditivas:

5. Qual é a embalagem de manteiga que é mais vantajosa comprar?

$125 + 125 + 125 + 125 = 500 \text{ g}$
 $0,80 + 0,80 + 0,80 + 0,80 = 3,20 \text{ €}$
 $250 + 250 = 500 \text{ g}$
 $1,60 + 1,60 = 3,20 \text{ €}$
 500
 3 €



A mais barata é a de 500g porque as outras levando a mesma quantidade costumam mais

Também neste caso, o facto de existirem numerais decimais na tarefa parece não ter sido causa de dificuldades para os alunos. As dificuldades que se evidenciaram nestas duas tarefas, surgiram, sobretudo, nos momentos finais da respectiva execução, seja indicando conclusões pouco consistentes ou não indicando os cálculos realizados.

Na entrevista, a segunda alínea da tarefa sobre o sumo de laranja implicava a realização de uma comparação numérica que envolvia somente números inteiros.

b) A irmã não costuma seguir a indicação do rótulo e coloca, por vezes, dois copos de concentrado com dez copos de água e, outras vezes, um de concentrado com seis de água. O sumo fica a saber mais a laranja na primeira ou na segunda situação? Explica o teu raciocínio.

Na sua resolução, Marta comparou as duas situações com a proposta pelo rótulo, utilizando, para isso, mais uma vez, a regra de três simples:

Marta – Este aqui [1º caso] dos 12 copos... Ela usa 10, devia usar 12, quer dizer que aqui [2º caso] fez o sumo e fica bom, aqui [1.º caso] fica a saber muito a laranja.

Professora – Porque usou muita laranja?

Marta – Menos água!

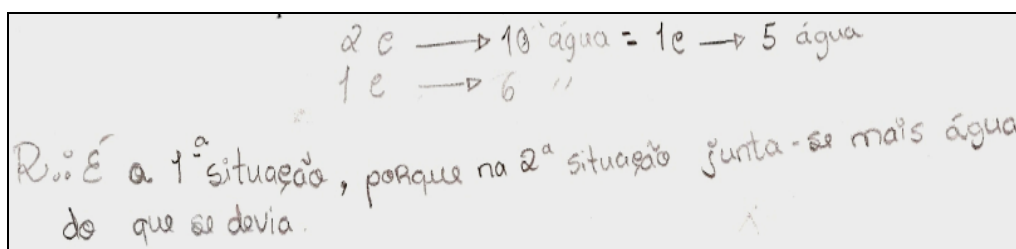
Dos restantes alunos, só Marina utilizou uma estratégia aditiva para relacionar os dados:

Marina – Aqui fica com mais... Mais sabor a laranja aqui fica com menos... Porque aqui ela põe... Põe 1 copo de concentrado com 6 de água e ali põe 2 copos de concentrado com 10 água... [silêncio] Ela para... Para fazer... Põe 2 copos de concentrado... Então por exemplo, aqui aumentou 1 copo de concentrado e então eu acho que ela devia ter posto 12 copos de água.

Professora – Mas explica lá como chegaste a esse 12...

Marina – Fiz assim... 6... Fiz assim $6+6$ dá 12.

Os restantes quatro alunos utilizaram uma relação funcional com recurso à unidade para responderem. Assim, procuraram, para cada caso, ver quantos copos de água correspondiam a 1 copo de sumo concentrado, tal como foi representado por Carla:



Tal como na alínea anterior, Jorge voltou a ter dificuldades na interpretação da questão, num contexto que não lhe era familiar.

Nesta questão, a maioria dos alunos usou uma estratégia multiplicativa, através de um procedimento funcional. Por outro lado, a dificuldade apresentada correspondeu, mais uma vez, à compreensão da tarefa, uma vez que o contexto da situação apresentada, não era familiar para a maioria dos alunos.

Também na segunda tarefa da entrevista os alunos tinham de fazer uma comparação numérica que incluía valores decimais:

2. Na papelaria da escola Ricardo percebeu que as esferográficas são vendidas em conjuntos. Indica que conjunto compensa mais comprar.



A maioria dos alunos calculou o preço unitário e, de seguida, construiu grupos de 4 canetas, para cada alternativa de preço, verificando então qual compensava mais comprar. Os alunos, mesmo após calcularem o preço de uma caneta para cada conjunto, não apoiaram a sua justificação no conjunto em que o preço de uma caneta era o mais baixo mas sim, no preço do conjunto de quatro canetas. Todas as representações apresentadas foram numéricas, como no caso de Carla:

| | | | |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| R.: Compensa mais comprar o conjunto de 4 esferográficos, porque se quisermos comprar o conjunto de 2 esferográficos ou o conjunto de 3 com 4 canetas irá custar 4,80 euros. | $2,4 : 2 =$ | $3,6 : 3 =$ | $4,0 : 4 = 1 €$ |
| | 1,2 € $1,2 € = 1 \text{ caneta}$ | 1,2 € $1,2 € = 1 \text{ caneta}$ | 1 € = 1 caneta |

Marina começou por não calcular valores precisos para cada caso, dando a resposta através de uma estimativa. No entanto, ao longo da sua argumentação acabou também por indicar o preço unitário:

Marina – Estou a pensar que se comprasse as últimas ele ficava mais bem servido...

Professora – Como é que chegaste a essa conclusão?

Marina – Porque não interessa, neste caso, o preço... Interessa é a quantidade.

Professora – É? Então se fossem 10 euros este último continuava a compensar?

Marina – Não! Porque este aqui custa 3 euros e 60, este aqui 4 este... Por mais... 1 caneta... Pagamos só 4 euros

As dificuldades apresentadas prenderam-se com a compreensão da tarefa, em especial devido ao uso do termo “compensar”, que não se revelou familiar para os alunos:

Jorge – Hummmm... Qual deles compensa mais comprar? Como assim?

Professora – Tens aí vários conjuntos tens de ver qual deles compensa mais...
[Jorge interrompe, pega na calculadora]

Jorge – Posso? Faço 2,40 a dividir por 2 canetas e depois vejo o resultado...
Ah este também era fácil...

Professora – Esse valor o que quer dizer?

Jorge – É o preço de uma caneta. É preciso escrever canetas? Depois... Faço 3,6 a dividir pelas 3 canetas... O preço é igual... De uma caneta.

Professora – Então nestas duas há alguma que compensa mais?

Jorge – Não... Só tenho de ver... Ah vai ser esta [aponta para 3.^a situação]
esta aqui é fácil porque divide-se por 4 canetas e vai dar 1 euro.

Surgiram também algumas observações em que os julgamentos dos alunos pareciam ter em conta aspectos não matemáticos, que valorizam no seu dia-a-dia, como, por exemplo, a cor das canetas.

Nesta tarefa, os alunos usaram uma estratégia multiplicativa, calculando a taxa unitária e formando grupos de quatro canetas para dar a resposta. De referir, que apesar do termo “compensar” suscitar algumas dúvidas, a maioria dos alunos não mostrou dificuldades em realizar a tarefa, parecendo tratar-se de uma situação com que estão habituados a lidar.

Na entrevista, a seguinte tarefa de comparação numérica só com números inteiros foi aquela em que os alunos sentiram maiores dificuldades, relacionadas com a interpretação, resolução e argumentação:

5. A Patrícia, irmã do Ricardo, acha-se uma perita a descobrir palavras em sopas de letras. Ela encontrou oito palavras, das quinze existentes numa “sopa” e o Ricardo encontrou doze, das vinte de outra sopa de letras. Quem é melhor neste jogo, a Patrícia ou o Ricardo?



Dos seis alunos entrevistados só Marta ampliou os jogos de forma a poderem ser facilmente comparados. Através de um procedimento escalar, ampliou-os de forma a terem 60 palavras cada um. De seguida, utilizou um procedimento que pressupõe a equivalência das duas fracções, comparando-as:

Marta – ... Vamos pôr isto tudo [aponta para o 15 e para o 20] na mesma unidade... 15 vezes 4 e aqui [8] também vezes 4... Vou ter 32. Aqui [20] para chegar a 60 é vezes 3 então aqui dá 60 e aqui [12] dá 36. Se nós fizéssemos 60

menos 32 só íamos encontrar 18... 28 e aqui 60 menos 36 só íamos encontrar 24, então o Ricardo é melhor que a irmã.

Professora – Porquê?

Marta – Porque achou mais e as que não achou foi em menor número que a irmã.

Professora – E este 60 é o quê?

Marta – É que só podemos comparar as duas unidades se elas tiverem o mesmo número.

Dos restantes alunos, a maioria utilizou como critério para indicar o melhor jogador o facto de faltar encontrar menos palavras da sopa de letras:

Carlos – A Patrícia.

Professora – Mas vais ter de me explicar porquê.

Carlos – Porque ao Ricardo faltam 8 palavras e à Patrícia faltam 7 e aqui é para saber qual deles é melhor... Portanto acho que é a Patrícia porque ela descobriu mais do que o Ricardo.

João utilizou uma estratégia aditiva aplicada inadequadamente, ao considerar que deveria manter a diferença constante:

João – Então... Ela encontrou 8 palavras das 15 existentes... Ah, é a Patrícia! Se das 15... 8 para 15 é 7... e 12 para 20 é 8 por isso ela descobriu mais.

Professora – Ela descobriu mais...

João – Sim.

Professora – Ela descobriu quantas?

João – Ela descobriu 8.

Professora – E ele?

João – Ah... Ele descobriu 12, mas nas que estão aqui, foi ela que descobriu mais; Se 8 para 15 é 7 e 12 para 20 é... 8 ah... É ele!

Professora – O que é que esse 7 e esse 8 representam?

João – As palavras que faltam... É ele porque foi ele que descobriu mais em 20... Descobriu mais e tentou mais palavras... Ela descobriu menos e tentou menos... Eu acho que é assim...

Neste caso o aluno verificou a diferença entre o total de palavras e as que foram encontradas para usar esse valor como o que se deveria manter constante.

Para além disso, Carla realçou que a expressão “melhor jogador” pode ter várias interpretações, ao perguntar se os irmãos teriam ou não a mesma idade, introduzindo deste modo um certo critério de justiça:

Professora – E quem é melhor neste jogo?

Carla – Este aqui era mais difícil e este mais fácil ... Mas eles... Têm a mesma idade?

Professora – Ah... Têm! Até podes imaginar que são gémeos falsos... Exatamente a mesma idade.

Carla – Ah se fosse assim este [Ricardo] era melhor.

Professora – Porquê?

Carla – Porque fez uma sopa de letras mais difícil que a irmã.

Professora – Há bocado tinhas dito a irmã... Estavas a ter em conta que um deles era mais velho que o outro era isso?

Carla – Sim... Que ela era mais nova do que ele.

Assim, parece-nos que esta questão foi dificultada também por questões de linguagem e pela interpretação do conceito de “melhor jogador”.

Identificação de situações de proporcionalidade. Na questão do teste que os alunos tinham de referir se havia ou não proporcionalidade directa a partir de uma tabela com dados numéricos, vários não responderam. Dos que responderam, muitos fizeram-no de forma pouco consistente, referindo que não havia proporcionalidade directa mas tiveram dificuldade em apresentar argumentos válidos.

Na entrevista, de forma a verificar se os alunos identificavam situações onde existia ou não proporcionalidade directa, foram propostas várias situações em que tinham de dizer se havia ou não proporcionalidade directa e justificar a sua resposta. Nestas situações analisámos a coerência entre a resposta e a justificação dada pelo aluno, bem como o tipo desta última:

3. A professora propôs como trabalho de casa que indicassem situações em que as grandezas **fossem directamente proporcionais**.

Repara nas situações indicadas pelo Ricardo e diz se concordas ou não com ele.

- a) O peso e o preço de maçãs;
- b) A idade e a altura de uma pessoa;
- c) O peso da mochila e o n.º de livros;
- d) Fotocópias e preços de acordo com a tabela:



| N.º de fotocópias | Preço (por cópia) |
|-------------------|-------------------|
| 1 a 10 | 0,10 € |
| 11 a 20 | 0,08 € |
| Mais de 20 | 0,06 € |

- e) Número de garrafas e quantidade de vinho:

| N.º de garrafas | 1 | 4 | 6 |
|------------------------|------|---|-----|
| Quantidade (em litros) | 0,75 | 3 | 4,5 |

Na primeira situação, sem recurso a quaisquer dados quantitativos, os alunos tinham de argumentar se existia ou não proporcionalidade directa entre o peso e o preço das maçãs. Nesta questão, para a qual não havia uma resposta correcta preestabelecida, houve alunos que atribuíram valores fictícios para justificarem a sua resposta:

Leandro – Se 4 kg é 5 euros, 8 kg é, não vai ser 4 euros na mesma, vai ser mais, como são mais quilos vão ser mais...

Professora – Queres dar um exemplo? Estavas a começar com um exemplo, se 4 kg são...

Leandro – 5 euros; 8 kg 10 euros...

Professora – Portanto, nessa situação...

Leandro – Há.

No entanto, outros não sentiram necessidade de o fazer:

Marta – O preço e o peso das maçãs... Às vezes metem 1 kg... 1 euro e depois metem 3 kg a dois euros e cinquenta... Às vezes não há. Posso escrever nem sempre há?

Nesta alínea quatro alunos deram respostas bem argumentadas e coerentes, apoiando-se, ou não, em valores fictícios. No entanto, dois dos alunos deram justificações pouco consistentes.

Já para a segunda alínea, os alunos tinham de indicar se existia ou não proporcionalidade directa entre a idade e o peso de uma pessoa. Alguns tiveram dificuldade em interpretar o enunciado. Uns acharam que era a mesma pessoa, em vários momentos da sua vida, outros argumentaram com base em pessoas diferentes mas com a mesma idade. Para fazer esta comparação, usaram pessoas próximas como, por exemplo, colegas de turma ou irmãos. No entanto, nesta questão, apesar dos alunos afirmarem que não há proporcionalidade directa, mostraram dificuldade em explicar o seu pensamento – quatro dos seis alunos entrevistados não conseguiram justificar as suas respostas com argumentação clara e consistente.

Na terceira alínea, também sem dados numéricos, os alunos tinham de argumentar se a relação existente entre o número de livros e o peso de uma mochila é proporcional ou não. Mais uma vez verificou-se alguma dificuldade da sua parte em explicar como pensaram. Quatro justificaram de forma satisfatória, utilizando dados numéricos por si atribuídos ou baseando-se em experiências do seu dia-a-dia:

Professora – Então dizes que não concordas porque...

Marina – Porque há mochilas que são... Que pesam mesmo quando não têm lá nada dentro.

Nas duas últimas alíneas, os alunos tinham tabelas com dados quantitativos em que se podiam basear. Na alínea d), dos seis alunos, quatro conseguiram justificar a sua resposta. Estes alunos basearam-se nos dados da tabela, ou seja, no facto do preço por fotocópia ir variando. Uma das alunas, antes de reparar na existência de uma tabela de apoio à tarefa, começou a resolvê-la baseada unicamente na sua experiência da escola:

Marina – Ia dizer uma coisa totalmente diferente. Ia dizer que concordava porque não tinha reparado nesta tabela... Se ela não existisse.

Professora – Porque aqui na escola não tem uma tabela assim?

Marina – Não!

Professora – Como é que funciona?

Marina – Então por exemplo se eu tirar uma fotocópia frente e verso vai custar 10 cêntimos acho eu, se eu tirar só verso vai custar 5.

Professora – Então achas que aqui na papelaria da escola há ou não há proporcionalidade directa?

Marina – Há proporcionalidade... Mas nesta tabela não há. [silêncio, regista]

Na alínea e) que relacionava, de forma proporcional, o número de garrafas com a quantidade de vinho, metade dos alunos optou por usar um procedimento escalar e a outra metade optou por uma estratégia aditiva. Os alunos que utilizaram procedimentos escalares relacionaram os dados dentro das grandezas, o que parece ter sido favorecido pela própria estrutura numérica dos dados, uma vez que a relação dentro das grandezas é inteira:

Marta – Número de garrafas e o líquido... Aqui temos de ver a relação entre este para ver se aumenta vezes quatro aqui também tem de aumentar vezes 4 [na calculadora faz $0,75 \times 4$] igual a 3... Este está bem mas agora se calhar este aqui... Agora vezes 6 [faz cálculos] 4,5 sim aqui há proporcionalidade directa porque a quantidade aumenta e o líquido aumenta.

Os restantes alunos utilizaram estratégias aditivas realizando adições sucessivas.

Os alunos entrevistados parecem ter compreendido, na sua maioria, o que é a relação de proporcionalidade directa, na medida em que conseguem identificar situações onde esta existe ou não existe.

CONCLUSÃO

A maior parte dos alunos participantes neste estudo, tal como no estudo de Silvestre (2006) consegue distinguir situações onde existe uma relação de proporcionalidade directa das situações em que tal relação não existe. No entanto, os alunos deste estudo, apesar de perceberem que existem regularidades numéricas entre os dados, apresentam, por vezes, alguma dificuldade em explicar, de forma clara, o que os conduz a essa resposta. Nas questões sem dados numéricos, recorreram, a maioria das vezes, a argumentos relacionados com o seu dia-a-dia e a exemplos a partir dos quais procuram verificar se existe ou não uma relação proporcional. Na presença de dados numéricos, a estratégia usada nesta procura de regularidades foi variando, deixando de estar concentrada em procedimentos aditivos e passando a incluir também procedimentos multiplicativos, escalares e funcionais. De acordo com Lamon (2005) esta capacidade de analisar as relações entre os dados e aplicar estratégias multiplicativas em vez de aditivas, requer tempo e prática e só acontece após os alunos conseguirem detectar as

quantidades intensivas (razões formadas por comparação de duas quantidades que podem não estar explícitas no enunciado do problema).

Este estudo mostrou, tal como outros (Lamon, 1993; Pittalis, Christou & Papageorgiou 2003; Spinillo, 1994), que os alunos conseguem resolver correctamente problemas que envolvem relações proporcionais antes do ensino formal deste tópico, recorrendo a estratégias intuitivas de carácter informal, geralmente aditivas. Daí ser muito importante que no seu ensino o professor tome por base os conhecimentos intuitivos dos alunos. Para perceber que estratégia é que estes estão a usar, precisa de encorajá-los não só a dar a resposta, mas também a explicar o seu raciocínio.

Uma das estratégias mais usadas pelos alunos na resolução das tarefas é de natureza aditiva – a construção ou *building-up* – também referida por Tourniaire e Pulos (1985) como uma das mais usadas por crianças e adolescentes neste tipo de problemas. No entanto, à medida que as aulas foram avançando os alunos foram adoptando estratégias mais formais de resolução dos problemas – estratégias multiplicativas, funcionais e escalares. Uma estratégia multiplicativa que surgiu num dos momentos de partilha na turma foi a regra de três simples, a partir de uma aluna que a aprendeu fora da escola e que a mostrou aos colegas. Muitos alunos assumiram esta estratégia como a preferida para resolverem tarefas do tipo valor omisso. Também no estudo de Oliveira e Santos (2000) esta estratégia foi muito utilizada pelos alunos que, segundo os autores, a achavam eficiente e rápida. A apetência dos alunos por este tipo de estratégia reforça a importância do professor favorecer neles a compreensão da articulação entre estratégias formais e informais.

A maioria dos percursos individuais de aprendizagem dos alunos da turma evoluiu no sentido das estratégias mais intuitivas para as estratégias mais formais e sofisticadas. Vários alunos mostraram conseguir usar diferentes estratégias para resolver a mesma tarefa. A escolha de uma ou outra estratégia parece estar condicionada pelo modo como a tarefa é colocada aos alunos, nomeadamente pela formalidade do momento. Assim, num teste de avaliação, com o tempo limitado, nas tarefas de valor omisso, os alunos mostraram tendência para utilizar uma estratégia mais formal, como a regra de três simples, que consideram rápida e eficaz, na resolução destas tarefas. Esta tendência não se revelou nas entrevistas, situação em que não se sentiram pressionados com o tempo de resolução e onde recorriam antes de mais a estratégias informais.

No que diz respeito à natureza das dificuldades também houve diferenças entre os alunos. Inicialmente estas centravam-se na concepção do plano pelo aluno (estabelecimento de relações erradas entre dados ou utilização apenas de parte dos dados). No teste final as dificuldades passaram a estar localizadas sobretudo na interpretação da tarefa. Na entrevista, as dificuldades localizaram-se sobretudo numa tarefa de comparação numérica que envolvia números inteiros e estavam relacionadas com a compreensão do enunciado (sentido do termo “melhor jogador”).

Neste estudo, tal como no de Tourniaire e Pulos (1985), o desempenho dos alunos foi afectado pela presença de contextos de misturas envolvendo grandezas contínuas (tarefa 3 do teste inicial e tarefa 7 da entrevista) e pela não familiaridade com o contexto (tarefa 7 da entrevista). Estas questões, apesar de terem só valores inteiros, revelaram-se as mais problemáticas, tanto no teste inicial como na entrevista. Outro factor de dificuldade foi o uso de termos como “compensar”, “melhor compra”, “melhor jogador”, que se revelaram problemáticos, conduzindo a interpretações diversas. Isto vai de encontro à observação de Lamon (1993) quando refere que a semântica afecta a prestação dos alunos na realização das tarefas.

Este estudo permite concluir que a exploração de grande variedade de tarefas, diferentes tipos de estratégias de resolução e diferentes contextos e a valorização de processos intuitivos parecem promover a compreensão dos alunos e a sua capacidade para chegarem a modelos e representações mais formais. No entanto, muito há ainda a explorar, em futuros estudos, relativamente às estratégias dos alunos e ao que os leva a fazerem determinadas opções, bem como às dificuldades e suas origens, nomeadamente, no tipo de contexto e linguagem utilizados.

REFERÊNCIAS

- Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 247-273.
- Boavida, A., & Ponte, J. P. (2002) Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.
- Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Cramer, K., Post, T., & Behr, M. (1989). Interpreting proportional relationships. *Mathematics Teacher*, 82(6), 445-452.
- Cramer, K., & Post, T. (1993a). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404-407.
- Cramer, K., & Post, T. (1993b). Making connections: A case for proportionality. *Arithmetic Teacher*, 40, 342-346.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Orgs.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children’s thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41-61.

- Lamon, S. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Orgs.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Oliveira, I., & Santos, M. (2000) *O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: Uma análise das estratégias*. 23.º Encontro ANPEd, Recuperado em 14.Junho.2006, de <http://168.96.200.17/ar/libros/anped/1913T.PDF>.
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Pittalis, M., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2003). Students' ability in solving proportional problems. *Proceedings of the 3rd European Research Conference in Mathematics Education*, Bellaria: Italy. Retirado de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_list.
- Resnick, L., & Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Orgs.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Silvestre, A. I. (2006). *Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade directa: Uma experiência no 2.º ciclo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Singer, J., Kohn, A., & Resnick, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 115-132). Hove: Psychology Press.
- Spinillo, A. (1994) Raciocínio proporcional em crianças: Considerações acerca de alternativas de educacionais. *Pro-posições*, 5(13), 109-114.
- Spinillo, A. (1996). Developmental perspectives on children's understanding of ratio and proportion and the teaching of mathematics in primary school. In J. Gimenez, R. Lins & B. Gómez (Orgs.), *Arithmetics and algebra education: Searching for the future*. (pp.132-147). Barcelona: Copisteria Astúrias.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Orgs.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Anexo 1

TESTE INICIAL FEITO POR TODA A TURMA

Disciplina de **Matemática** - Ficha de trabalho

Nome _____ Aluno N.º ____ 6.º B 07.02.2007



Um automóvel que circula a uma velocidade constante demora 10 minutos a percorrer 15 km. Quanto tempo leva para percorrer 90 km? Explica o teu raciocínio.

Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas por cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com seis rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas? Mostra como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.



Repara na imagem. Que chá, A ou B, é o mais doce? Justifica a tua resposta.



Num supermercado estão a fazer uma promoção em que vendem champôs em conjuntos de dois ou de três. Indica qual é a escolha mais económica. Diz como chegaste a essa conclusão.



Indica se cada frase é verdadeira ou falsa e explica o raciocínio que utilizaste, em cada caso, para poderes responder:

- Se uma rapariga chega à escola em 10 minutos duas levam 20 minutos.
- Se uma caixa de cereais custa 2,80€ duas custam 5,60€.
- Se um rapaz faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 6 horas.
- Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias.



ANEXO 2

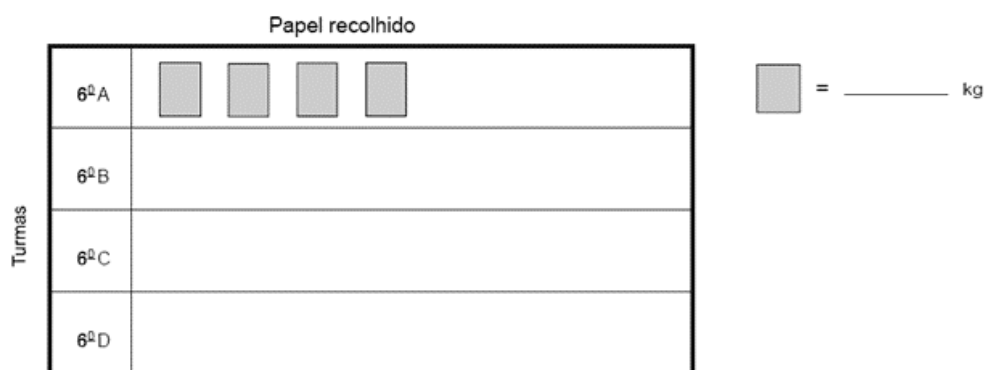
FICHA FINAL FEITA POR TODA A TURMA

| | | |
|---|------------------|---------------------|
| Ficha de Avaliação de Matemática - 6.º _____ | | |
| Nome _____ | N.º _____ | Data _____ |
| Classificação _____ | Professora _____ | Enc. Educação _____ |

1. A tabela indica os quilogramas de papel que os alunos do 6.º ano da escola do Tomás recolheram para ser reciclado.

| Turmas | Papel recolhido (em kg) |
|--------|-------------------------|
| 6.º A | 100 |
| 6.º B | 150 |
| 6.º C | 125 |
| 6.º D | 175 |

Utiliza a informação da tabela para completares o seguinte pictograma e a respectiva legenda. No pictograma já está representada a quantidade de papel recolhido pelos alunos do 6.º A.



2. Calcula o valor da seguinte expressão numérica:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} : 2$$

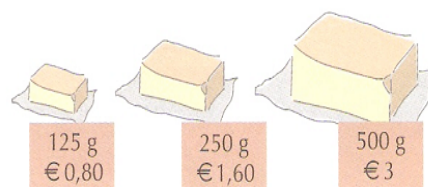
3. O grupo de amigos do Pedro foi à Pizaria na 5.ª feira passada. Pediram 3 pizzas para 9 pessoas, para que todos comessem igual quantidade de pizza. Na próxima 5.ª feira voltarão à Pizaria, mas serão 15 pessoas. Quantas pizzas têm de pedir para que cada um coma a mesma quantidade da semana anterior?

4. A Filipa foi a um supermercado onde o preço das maçãs era o seguinte:

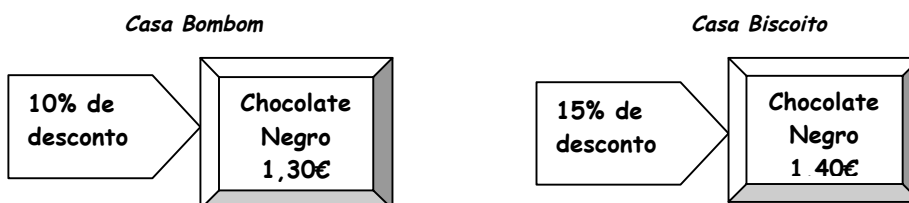
| | | | |
|------------------|------|------|------|
| Peso (em kg) | 3 | 4 | 5 |
| Preço (em euros) | 5,40 | 7,10 | 8,70 |

Averigua se há proporcionalidade directa entre o peso das maçãs e o preço. Explica como chegaste à tua resposta.

5. Qual é a embalagem de manteiga que é mais vantajosa comprar?



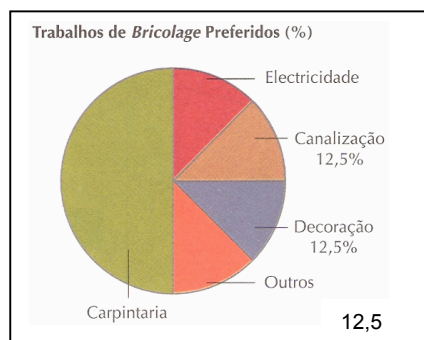
6. Para fazer a cobertura do bolo, a Ana precisa de "Chocolate Negro".



Em qual das lojas lhe ficará mais barato o chocolate? Quanto terá de pagar por ele?

7. Observa o gráfico que se refere aos trabalhos de *bricolage* preferidos por um grupo de pessoas, em que metade prefere carpintaria. Sabe-se que 125 dessas pessoas preferem trabalhos de decoração.

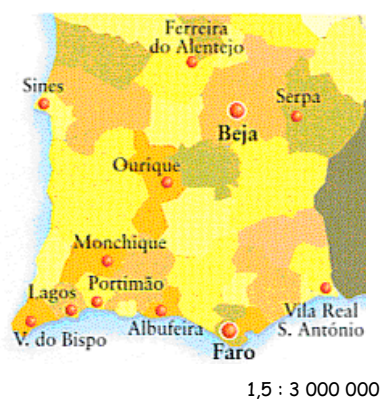
a) Qual é a actividade que tem mais adeptos?



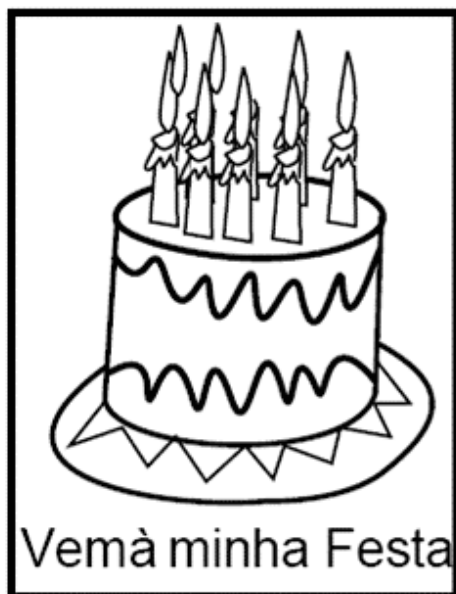
b) Quantas foram as pessoas inquiridas ao todo?

c) Que percentagem de pessoas prefere trabalhos de electricidade?

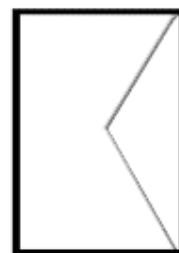
8. No mapa a distância entre Faro e Beja é 3,5. Qual a **distância real**, em linha recta e em km, entre as cidades?



9. A figura representa um postal, no seu tamanho real, e um envelope reduzido à escala de 1:3.



tamanho real



escala 1:3

Será que o postal cabe no envelope, sem ser dobrado? Utiliza a régua graduada para efectuares as medições que achares necessárias. Explica como chegaste à tua resposta.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7a) | b) | c) | 8 | 9 |
|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|----|----|-----|----|
| 13% | 10% | 9% | 8% | 10% | 10% | 4% | 9% | 7% | 12% | 8% |

O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL DOS ALUNOS DO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

RESUMO.

Este artigo relata um estudo sobre o raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo do ensino básico antes e depois do ensino da proporcionalidade directa. Especial atenção é dada às suas estratégias e dificuldades na resolução de problemas e ao modo como identificam se existe ou não proporcionalidade numa dada situação. O estudo foi realizado numa turma do 6.º ano e segue uma metodologia qualitativa, usando para a recolha de dados um teste inicial e um teste final feitos a toda a turma e uma entrevista a seis alunos. Os resultados mostram que, mesmo antes do ensino formal do tópico, os alunos são capazes de utilizar diferentes estratégias para resolver tarefas envolvendo relações proporcionais. No final, os alunos mostram ter evoluído no sentido de usarem cada vez mais estratégias multiplicativas informais e estratégias formais como a regra de três simples. Os alunos manifestaram uma segurança assinalável no uso destas estratégias diversas, mas evidenciam algumas dificuldades na interpretação do enunciado dos problemas em certos contextos. A maioria dos alunos consegue identificar situações em que existe proporcionalidade directa, mas apresenta, por vezes, dificuldades em justificar as suas respostas.

Palavras-chave: Matemática, Raciocínio proporcional, Proporcionalidade directa, Estratégias, Dificuldades

PROPORTIONAL REASONING OF STUDENTS OF 5TH AND 6TH GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL

ABSTRACT.

This paper reports a study about proportional reasoning of students of the 2nd cycle of basic education before and after teaching of direct proportion. Especial attention is given to their strategies and difficulties in solving problems and to the way they identify if there is a proportional relationship in a situation or not. The study was carried out in a grade 6 class and follows a qualitative methodology, gathering data through a pre- and a post-test to the class and an interview to six students. Results show that, even before the formal teaching of the topic, students are able to use different strategies solve tasks involving proportional relationships. At the end of the study students show that they evolved in the sense of using much more informal multiplicative strategies and strategies such as cross product. Students show a remarkable security in using different strategies, but also show some difficulties in interpreting the questions posed in problems in certain contexts. Most students are able to identify situations in which there is direct proportion, but sometimes finds difficult to justify their responses.

Keywords: Mathematics, Proportional reasoning, Proportion, Strategies, Difficulties