

ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO NA APRENDIZAGEM DE ANÁLISE NUMÉRICA

Ana Henriques

Departamento de Formação Científica de Base, Escola Naval

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

INTRODUÇÃO

Uma sociedade caracterizada pela exigência, competitividade e constante mudança, resultado de desenvolvimentos científicos e tecnológicos, requer indivíduos que, além de conhecimentos, tenham capacidade de adaptação e de resolução efectiva dos problemas que se lhes apresentam. A escola em geral e a universidade em particular tem vindo a ser alvo de duras críticas por não estarem a conseguir cumprir bem o seu papel, a avaliar pelo insucesso dos estudantes universitários (sobretudo nos primeiros anos e nas disciplinas de Matemática) e pela notória inadaptação do ensino superior às solicitações sociais. Os sistemas educativos devem ter a preocupação de determinar quais as competências e capacidades necessárias para que os alunos possam com êxito vir a ter uma vida produtiva na sociedade actual. Estabelecer novas finalidades, traçar novos objectivos e procurar melhores condições para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos, são temas que suscitam uma reflexão pedagógica. Cabe também aos professores reflectir de forma mais aprofundada sobre a estratégia de ensino que adoptam e os processos de aprendizagem matemática que possibilitam aos alunos.

Nos últimos anos, a investigação educacional tem realizado numerosas pesquisas, usando estratégias variadas e adoptando enfoques distintos. Um dos seus objectivos é entender o processo como se dá o conhecimento e a aprendizagem. Os estudos realizados, em diferentes níveis de escolaridade, têm revelado que as actividades de cariz investigativo contribuem de forma significativa para a compreensão de novos conceitos e para desenvolver o pensamento matemático dos alunos do ensino básico e secundário (Ponte, 2003). No entanto, a introdução de tarefas de investigação na aprendizagem da Matemática no ensino superior, como estratégia de ensino-aprendizagem, tem ainda uma expressão reduzida, em grande medida devido ao facto de não existir pesquisa que fundamente a sua introdução neste nível de ensino.

Deste modo, surge como pertinente a realização de um estudo tendo em vista compreender os processos matemáticos utilizados pelos alunos na resolução de actividades de investigação

na sala de aula e as potencialidades deste tipo de actividades na promoção das aprendizagens dos alunos em disciplinas de Matemática do ensino superior. Com este objectivo foram abordadas as seguintes questões referentes a uma experiência de ensino realizada numa disciplina de Análise Numérica:

- (1) Que processos matemáticos utilizam os alunos na resolução de actividades de investigação?
- (2) De que forma a aprendizagem de tópicos de Análise Numérica é influenciada pela realização de actividades de investigação?
- (3) Quais os principais factores que influenciam o modo como os alunos realizam as actividades de investigação?

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO

Vários autores têm abordado a natureza do pensamento matemático (Burton, 1984; Freudenthal, 1973; Pólya, 1954), referenciando-o como um processo mental dinâmico e complexo, construído com base em compreensões e conhecimentos adquiridos, que permite explorar e utilizar ideias de carácter geral, não necessariamente contextualizadas na Matemática. O estilo de pensamento usualmente denominado de matemático é, assim, válido em todos os domínios uma vez que esta designação não advém do facto de se pensar sobre Matemática mas sim de envolver as operações, processos e dinâmicas reconhecidas como matemáticas.

O pensamento matemático, entendido como processo mental, não pode ser directamente observado. No entanto, a partir de manifestações observáveis desse pensamento podemos inferir alguns processos característicos da actividade matemática e, em particular, das investigações matemáticas. Os diferentes autores destacam diferentes aspectos e analisam-nos de acordo com o grau de relevância e o significado que lhes atribuem. No entanto, há alguns que são referidos com muita frequência: (i) a procura de regularidades e de invariantes; (ii) a abstracção e a generalização; e (iii) a formulação de conjecturas e a sua demonstração ou refutação.

Para Goldenberg (1998), o processo de criação matemática inicia-se com uma fase informal de recolha de dados, geração de exemplos e experimentação de várias estratégias. O autor considera que a Matemática é a ciência dos padrões, tratando da procura de invariantes, ou seja, da estrutura subjacente a coisas que em tudo o resto parecem completamente diferentes. Pelo seu lado, Mason, Burton e Stacey (1982/88) consideram a generalização e a especialização como fundamentais na criação do pensamento matemático, pois, na sua perspectiva, este pensamento resulta da reciprocidade constante entre estes dois processos matemáticos. Desta forma, a descoberta de regularidades conduz à formulação de conjecturas. Estas, depois de formuladas com base em evidência mais ou menos sólida, devem ser verificadas e justificadas ou refutadas. Davis e Hersh (1985) discutem em profundidade a questão da

demonstração. No seu entender, a demonstração é mais do que um simples pedantismo, já que “aumenta o entendimento, mostrando o que é essencial no assunto. As demonstrações sugerem Matemática nova” (p. 182). Davis e Hersh (1985) consideram ainda que os processos apresentados se podem encontrar em Matemática, muito particularmente, quando se realizam investigações matemáticas. No entanto, na sua perspectiva, nem todos estes processos são exclusivos desta ciência, embora tenham um papel importante no estabelecimento da sua estrutura.

O pensamento matemático tem sido estudado sobretudo do ponto de vista cognitivo. No entanto, os aspectos afectivos também têm merecido atenção por parte de alguns autores. Por exemplo, para Poincaré (1988, 1996) a intuição que actua, em grande medida, de forma inconsciente, constitui uma componente fundamental do espírito matemático e do processo de criação desta ciência. Também Hadamard (1945) considera que é incontestável o papel do trabalho inconsciente na invenção matemática. Associado a este papel do inconsciente e da intuição surge também o elemento estético, referido por Poincaré (1996) e por muitos dos matemáticos entrevistados por Burton (1995). Parece, pois, que prestar atenção aos processos de investigação e aos estados emocionais e psicológicos que os provocam é fundamental para conseguir um ponto de vista útil e criativo acerca do pensamento matemático.

A Matemática escolar tende a focar-se e a dedicar muito tempo ao ensino dos resultados produzidos por esta ciência, geralmente apresentados como um conjunto de factos e técnicas, e a negligenciar os processos de pensamento matemático, o que leva à reconhecida dificuldade demonstrada pelos alunos em pensar matematicamente (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 1994). Com o cada vez maior desenvolvimento científico e tecnológico, há tarefas com que nos deparamos frequentemente que requerem a utilização de ‘ferramentas’ matemáticas. Por isso, não basta conhecer procedimentos de cálculo e conteúdos matemáticos isolados, é necessário adquirir um conjunto de competências que promovam os modos de pensar e raciocinar em Matemática que Goldenberg (1998) designa por “hábitos de pensamento” (p. 33). Nesta perspectiva, o ensino da Matemática deve ser orientado para que os alunos adquiram as destrezas e técnicas que se identificam com o fazer Matemática ou pensar matematicamente (APM, 1988; NCTM, 1989/91).

O conceito de ‘actividades de investigação matemática’ ou ‘investigações matemáticas’ está naturalmente associado à actividade que os matemáticos profissionais desenvolvem na produção de conhecimento e que consiste em descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, formular conjecturas sobre as respectivas propriedades, procurar argumentos que demonstrem essas conjecturas e levantar novas questões para futura investigação. Neste sentido, investigações matemáticas representam uma actividade a que se associam algumas características inerentes ao processo de criação matemática tais como descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões e espírito crítico.

A ideia de que aprender Matemática é fazer Matemática, defendida nos últimos anos em diversos documentos programáticos (por exemplo, NCTM, 1989/91), é uma perspectiva que encontra eco em vários autores (Braumann, 2002; Hadamard, 1945; Oliveira, Segurado &

Ponte, 1998). Neste sentido, em contextos de ensino e aprendizagem, o conceito de investigação matemática traduz uma actividade em que o aluno, de acordo com o grau de ensino em que se encontra, desenvolve um trabalho de características semelhantes ao realizado pelos matemáticos profissionais:

O conceito de investigação matemática, como actividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 23).

A actividade matemática dos alunos pode consistir em procurar regularidades, formular questões para as quais não têm resposta pronta, testar as primeiras conjecturas, estabelecer argumentos plausíveis e produzir provas formais para validar (ou não) essas conjecturas e generalizá-las, se for caso disso, ou voltar a formular novas questões. Ponte, Ferreira, Bruñeira, Oliveira e Varandas (1998) argumentam também, que as investigações matemáticas, sendo uma parte essencial da actividade do investigador matemático, proporcionam ao aluno uma perspectiva mais completa da Matemática, contrariando assim uma visão desta ciência centrada na execução de procedimentos e algoritmos.

PROPOSTA PEDAGÓGICA

ASPECTOS GERAIS

Na base deste estudo esteve a realização de uma proposta pedagógica visando promover nos alunos a aprendizagem de conceitos e métodos fundamentais da Análise Numérica através de uma abordagem de natureza investigativa. Esta proposta foi concretizada em duas turmas do 2.º ano dos cursos de licenciatura da Escola Naval, na disciplina de Análise Numérica, durante o 1.º semestre do ano lectivo de 2005/06, cujo programa inclui os temas Números e Erros, Equações não lineares, Ajuste de curvas, Interpolação polinomial e Integração numérica.

A Análise Numérica constitui um domínio da Matemática propício a um ensino em que a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa assume um lugar importante. Os conhecimentos matemáticos já possuídos pelos alunos podem servir de base ao seu trabalho nesta disciplina. A exploração e a análise de conceitos e procedimentos conhecidos dos alunos permitem definir critérios e tomar decisões para obter generalizações de métodos e técnicas que, por sua vez, dão origem aos diversos métodos numéricos abordados nesta disciplina. Por outro lado, os métodos de cálculo numérico são usados na vida profissional (e também na vida

quotidiana) quando surge a necessidade de obter respostas numéricas a problemas matemáticos que não podem ser resolvidos através dos métodos de cálculo exactos. Usualmente a Análise Numérica usa uma abordagem em que primeiro detalha várias técnicas e depois usa essas técnicas em problemas-exemplo. No entanto, esta abordagem tende a produzir estudantes que são muito versados em algoritmos e são capazes de resolver problemas semelhantes aos anteriormente praticados, mas frequentemente não compreendem o significado do que estão a fazer. Pelo contrário, um trabalho de exploração de situações, levando à formulação de novos problemas e de estratégias de resolução poderá levar a uma maior capacidade de lidar com os problemas reais que eles encontram na sua prática profissional. Assim, a realização de actividades de exploração e investigação, abordando problemas práticos de aplicação com a discussão dos métodos e técnicas pelos quais esses problemas podem ser resolvidos numericamente, é uma abordagem que corresponde melhor ao que os estudantes realmente fazem quando têm que aplicar métodos numéricos em novas áreas. De um ponto de vista de aprendizagem, esta abordagem poderá também ser mais efectiva porque as situações apresentadas fornecem um contexto para os estudantes perceberem porque é que as várias técnicas de Análise Numérica são importantes, isto é, motivam a necessidade destas técnicas.

O trabalho nesta disciplina envolveu a realização de um grupo de actividades de investigação, que ocuparam uma parte significativa dos tempos de aulas (18 aulas de 50 minutos) e onde foram visíveis dois momentos distintos: a exploração da tarefa e a discussão em grande grupo do trabalho desenvolvido pelos alunos. As restantes aulas contemplaram momentos de natureza teórica sobre os conteúdos programáticos, alguns dos quais trabalhados nas tarefas de investigação (10 aulas de 50 minutos) e ainda momentos de resolução de problemas de aplicação directa ou de exercícios práticos para consolidação de conceitos (11 aulas de 50 minutos).

A avaliação dos alunos teve como base diferentes tipos de instrumentos de forma a contemplar as diferentes vertentes de trabalho desenvolvido nas aulas: (i) os relatórios de grupo sobre a investigação realizada na sala de aula, (ii) a observação directa da participação dos alunos na exploração das tarefas e nas discussões em grande grupo e (iii) o teste final escrito.

TAREFAS

A presente investigação centrou-se nas aulas onde se realizaram actividades de investigação. As quatro tarefas propostas aos alunos foram concebidas de modo a constituírem oportunidades para estes desenvolverem um maior conhecimento relativo aos processos matemáticos envolvidos na actividade de investigação e, ao mesmo tempo, representam contextos para abordar os diferentes tópicos que fazem parte do programa de Análise Numérica. As opções tomadas pela professora na selecção, adaptação ou criação de tarefas a realizar na sala de aula foram enformadas pela preocupação em respeitar o cumprimento dos assuntos a tratar na disciplina. Além disso, as tarefas tinham como objectivo a promoção de alguns aspectos da

Matemática, como sejam o raciocínio e a comunicação matemáticas e as conexões entre as várias áreas da Matemática (NCTM, 1994).

As tarefas apresentadas aos alunos eram diversificadas e motivadoras. Eles não dispunham de teoria ou modelo para fazerem uma resolução completa, tendo sido desafiados a desenvolver e defender as suas próprias estratégias. Nestas aulas, valorizou-se a experimentação, o raciocínio indutivo, o questionamento, a formulação e o teste de conjecturas, a sua justificação, a partilha de opiniões e o trabalho de grupo.

A apresentação das tarefas aos alunos foi suportada por um texto escrito cujo objectivo era tentar enquadrá-los, o mais possível, na situação problemática e servir de ponto de partida para o estudo de questões posteriores. Estas questões, directamente relacionadas com a situação apresentada, constituíam uma forma de activação de alguns processos de pensamento e de exploração de tópicos de Análise Numérica decorrentes da identificação e utilização de conceitos e métodos matemáticos na resolução das situações indicadas. Desta forma, a estrutura das quatro tarefas de investigação utilizadas nas aulas era idêntica embora essas tarefas tivessem objectivos específicos diferentes (os enunciados das tarefas encontram-se em anexo):

Tarefa 1 – Arte de marinheiro. Tarefa de natureza exploratória que abordou conceitos e regras da aritmética intervalar. Nesta tarefa foi colocado um problema concreto cuja situação real era bastante conhecida pelos alunos e propõe-se inicialmente a exploração de casos particulares de operações elementares conhecidas (adição, subtracção, multiplicação e divisão) utilizando intervalos de números reais. Apelava a conhecimentos sobre as propriedades dos números reais e sugere-se a procura de generalizações. É um exemplo de uma tarefa em que se pretendia a identificação de regras e, por isso, se tornava necessário a elaboração e teste de conjecturas.

Tarefa 2 – Águas ameaçadas. Nesta tarefa foi apresentado um modelo matemático de um fenómeno quotidiano. Na primeira questão propõe-se a construção de gráficos e sua interpretação para ajudar o desenvolvimento das questões seguintes que se focalizavam em saberes na área da análise matemática. Esta tarefa constituiu um exemplo de possibilidade de utilização da calculadora como meio auxiliar não só de cálculo, mas também de visualização da informação disponibilizada. Sugere-se ainda a procura de generalizações para os procedimentos efectuados de forma à dedução de um método de resolução de equações não lineares. Aos alunos coube encontrar um processo que não conheciam à partida e que permitiu responder às questões colocadas.

Tarefa 3 – Ainda os lagos... Pretendia-se, nesta tarefa, envolver os alunos numa situação em que necessitavam de recorrer à noção de função e a conhecimentos prévios de interpolação e geometria analítica. A tarefa de investigação propriamente dita consistiu em analisar o comportamento de um conjunto de dados iniciais, oriundos de uma experiência real com significado para os alunos, e seleccionar, dentro dos modelos por eles conhecidos, a função que melhor descrevia esse comportamento. Propõe-se a construção de modelos matemáticos para as

situações contextualizadas usando tabelas e expressões analíticas. Foi necessário definir critérios e tomar decisões com base em conhecimentos anteriores. Também aqui a utilização da calculadora foi significativa.

Tarefa 4 – Quem vai para o mar... O objectivo desta tarefa compreendeu a exploração de várias situações, reforçando as aprendizagens desenvolvidas na tarefa anterior relativamente aos métodos já estudados de interpolação e ajuste de curvas, levando os alunos a reconhecê-las independentemente de trabalharem noutra domínio. Os alunos foram solicitados a calcular o valor de um integral de uma função que apenas é conhecida para alguns valores oriundos de uma situação real. Foi necessário explorar várias situações de forma poderem generalizar procedimentos e propor métodos de integração alternativos apropriados a cada situação. A reduzida estruturação da tarefa possibilitou diferentes percursos possíveis de desenvolvimento, que dependeram dos conhecimentos mobilizados pelos alunos.

CONCRETIZAÇÃO NA SALA DE AULA

Na exploração das tarefas na sala de aula os alunos trabalharam em grupos de 3 e 4 elementos. Este modo de organização pretendia melhorar a sua confiança no trabalho em Matemática e facilitar a comunicação entre os elementos do grupo e entre o grupo e a professora. Os alunos usaram também a calculadora gráfica, que constituiu auxiliar de trabalho fundamental ao permitir a visualização de informação relativa às situações propostas e facilitar os cálculos, sobretudo quando estes se tornaram repetitivos e fastidiosos, evitando a desmotivação ou o abandono da tarefa por parte dos alunos.

Nas primeiras tarefas, foi bastante notória a falta de hábito dos alunos em realizar actividades de investigação. Solicitaram com frequência a professora e esperavam que esta lhes dissesse o que era para fazer sem se esforçarem muito em tentar compreender a tarefa. Com a continuação do trabalho investigativo foram compreendendo que, de uma forma geral, em vez de lhes serem fornecidas respostas às suas questões, eram incentivados a pensarem por si próprios através de comentários que não indiciavam uma conclusão ou um ‘modo de fazer’. Desta forma, a dependência em relação à professora e o tipo de apoio solicitado foi-se alterando, verificando-se um aumento da autonomia dos alunos.

Depois da exploração de cada tarefa reflectia-se sobre o trabalho realizado. Os alunos depararam-se então com diferentes estratégias de resolução, com justificações diferentes das que tinham apresentado e com pedidos de esclarecimento por parte dos seus colegas. Algumas vezes estas discussões permitiram uma exploração de outros assuntos, o que suscitou a introdução de tópicos programáticos a serem desenvolvidos nas aulas de natureza teórica.

METODOLOGIA DO ESTUDO

OPÇÕES METODOLÓGICAS E PARTICIPANTES

Este trabalho tinha como objectivo descrever e compreender os processos matemáticos utilizados pelos alunos na realização de actividades de exploração/investigação na sala de aula e as suas aprendizagens no âmbito da Análise Numérica. A primeira autora deste artigo foi a docente que realizou esta experiência de ensino, que constitui assim um estudo sobre a sua prática lectiva.

Uma vez que se pretendia uma descrição de uma realidade que não pode ser entendida de uma forma descontextualizada, optou-se por uma abordagem do tipo qualitativo na sua variante de estudo de caso (Yin, 2003). Cada caso é aqui constituído por um grupo de alunos. Esta abordagem criou condições para uma descrição dos processos matemáticos usados pelos alunos e permitiu acompanhar em detalhe a evolução dos seus raciocínios, o que foi importante para a respectiva compreensão e interpretação face aos objectivos da investigação.

Os participantes eram os alunos do 2.º ano dos vários cursos de licenciatura ministrados na Escola Naval que frequentavam a disciplina de Análise Numérica. Os alunos estavam divididos em duas turmas, que os diversos professores consideravam idênticas no que diz respeito a comportamento e aproveitamento escolar. Na generalidade, estes alunos revelam um espírito curioso e interessado por aquilo que se passa à sua volta, aderem com entusiasmo às actividades extra-curriculares organizadas na e pela escola e são, por norma, participativos e cumpridores. Os grupos de trabalho foram formados espontaneamente pelos alunos e, tal como acontece na globalidade da turma, apresentavam grande heterogeneidade.

Embora se tenha analisado o trabalho das duas turmas (num total de 50 alunos) na realização das mesmas tarefas de investigação, dentro de cada turma estudou-se apenas em profundidade o caso de um grupo em particular. Para que os alunos não sentissem diferenciação entre si, a escolha do grupo de estudo, em cada uma das turmas, foi feita tendo em conta as ofertas de participação voluntária e com o acordo de todos os alunos. Numa turma apenas um grupo se voluntariou. Na outra turma, houve dois grupos que se ofereceram mas que chegaram a um consenso entre eles sobre aquele que participaria no estudo. Os quatro alunos que constituíram o grupo A de observação, três do sexo masculino (António, Pedro e Reinaldo) e um do sexo feminino (Marta) tiveram, de modo geral, uma escolaridade bem sucedida, quer em Matemática, quer noutras disciplinas. Os alunos tinham uma boa relação entre si e funcionavam bem, embora não fosse este o grupo que mais sobressaiu durante as aulas dedicadas à realização de tarefas de investigação. Nas aulas destinadas à exploração das tarefas, Marta foi a principal dinamizadora do trabalho e assumiu a liderança do grupo. O grupo B era constituído, inicialmente, por quatro alunos, todos do sexo masculino (Miguel, Zé, Jordão e Carlos, tendo este último frequentado já o ensino superior). Já após a realização da 2.ª tarefa, Jordão mudou de curso e, conseqüentemente, de turma, ficando o grupo de estudo a contar com apenas três

elementos. Contrariamente ao grupo A, este grupo destacou-se em todas as fases das aulas dedicadas à realização de tarefas de investigação, quer pelo empenho e entusiasmo demonstrados na sua exploração, quer pela participação activa nas discussões em grande grupo, quer ainda pelo cuidado e correcção colocados na elaboração dos relatórios. Nas aulas destinadas à exploração das tarefas, todos os elementos do grupo foram muito participativos e dinâmicos, existindo uma boa relação e uma grande interacção entre os seus elementos.

RECOLHA E ANÁLISE DE DADOS

A recolha dos dados foi feita durante o 1.º semestre do ano lectivo de 2005/06, tendo como base a proposta pedagógica definida e recorrendo a várias técnicas próprias da investigação qualitativa: observação directa e participante, registos áudio do trabalho dos grupos que constituíram os casos durante as aulas em que se realizaram as tarefas de investigação, relatórios de investigação elaborados pelos alunos e entrevistas semi-estruturadas realizadas após as tarefas aos grupos estudados em maior profundidade. Foram ainda aplicados questionários, a todos os alunos participantes, no início e no final da experiência de ensino. Esta variedade de fontes de recolha de dados permitiu a triangulação dos resultados emergentes, com vista à consistência da própria informação recolhida e das interpretações produzidas.

A análise dos dados começou a ser realizada durante a sua recolha. As notas de campo constituíram o primeiro nível desta análise e foram usadas desde logo para perceber, entre outros aspectos, se os processos usados pelos alunos dependiam da estruturação da tarefa ou da forma como era apresentada e de que forma as interacções e a mobilização de conhecimentos e competências eram influenciadas pela existência ou não de uma discussão e apresentação em grande grupo.

Durante o trabalho de campo foram preparadas as entrevistas realizadas aos alunos dos grupos considerados. As questões que constituíram o eixo orientador destas entrevistas foram formuladas com base na análise das notas de campo e dos relatórios elaborados pelos grupos, depois de identificados os pontos que precisavam de ser explorados ou esclarecidos e que estavam relacionados com a compreensão do desempenho dos alunos nas tarefas realizadas na sala de aula.

A segunda fase de análise de dados, mais profunda e estruturante, ocorreu após terminada a recolha de dados e pretendeu dar resposta às questões de estudo. As notas de campo, os registos áudio do trabalho dos alunos dos grupos em estudo, na sala de aula e os relatórios escritos por eles elaborados, constituíram a base da análise que permitiu compreender o desempenho dos alunos na exploração das tarefas de investigação. Todo o material foi organizado por grupo de alunos, separado por tarefa de investigação. Foram revistas as notas de campo relativas às aulas de exploração das tarefas e transcritas diversas partes dos registos áudio, consideradas significativas para a análise. Finalmente, nos relatórios dos alunos foram anotados aspectos que permitissem identificar e discriminar os processos matemáticos uti-

lizados, as aprendizagens realizadas, os factores que os influenciaram e as principais dificuldades sentidas pelos alunos na realização deste tipo de actividades.

RESULTADOS

PROCESSOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS PELOS ALUNOS

A realização de tarefas de investigação por parte dos alunos possibilitou a utilização de vários processos característicos da actividade matemática. No entanto, constatou-se que a sua presença não foi igual em todas as tarefas propostas e que a sua utilização não foi feita de igual modo pelos alunos.

Os processos de *registo e organização dos dados* estiveram presentes em todas as tarefas e a sua evolução fez-se de forma gradual. Os dois grupos analisados tiveram sempre a preocupação de fazer registos escritos das suas explorações através da elaboração de listagens, esquemas e gráficos, embora inicialmente não revelassem competência em organizar registos significativos e sistemáticos das suas descobertas.

Alguns autores (e.g., Ernest, 1996; Ponte et al., 1998) destacam, como uma etapa importante numa investigação matemática, a *formulação de questões* produtivas e interessantes. Os dados recolhidos sugerem que a actividade de investigação dos alunos não contempla formalmente esta etapa. Após o início das tarefas emergiram de imediato as primeiras conjecturas sob a forma de afirmações que os alunos confirmavam ou refutavam com trabalho posterior. Esta reduzida atenção dos alunos à formulação de questões é também referida noutras investigações (Brocardo, 2001; Ponte & Matos, 1996). Em contrapartida, a *formulação de conjecturas* foi um processo frequentemente utilizado pelos dois grupos em todas as tarefas, embora com ênfase diferente.

A ideia que os alunos têm, de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões, levou o grupo A, numa fase inicial e à semelhança do observado por Ponte et al. (1998), a formular conjecturas, considerando-as como conclusões após um número reduzido de testes. Numa fase posterior, foi também visível a necessidade de formulação de um grande número de conjecturas/conclusões, independentemente da sua importância ser trivial ou significativa. Só com o trabalho continuado em torno da exploração de tarefas de investigação e, em particular com as discussões em grande grupo, é que os alunos compreenderam o estatuto de uma conjectura. Já no grupo B, as conjecturas formuladas surgiram sempre através da experimentação de alguns casos e da procura de regularidades entre eles. Verificou-se também que este processo teve uma maior presença (muitas vezes eram formuladas várias hipóteses simultâneas) nas tarefas em que os alunos recorreram a um maior número de exemplos particulares, depreendendo-se então uma forte relação entre os processos de especialização e formulação de conjecturas, como referido também em Mason, Burton e Stacey (1982).

Depois de formulada, uma conjectura tem de ser submetida a sucessivos testes. O teste de conjecturas integrou todas as tarefas e foi muito utilizado pelos dois grupos estudados. Relativamente ao teste de conjecturas os alunos não demonstraram grandes dificuldades, a não ser relativamente às decisões sobre o número e o tipo de casos a estudar. Foi também neste processo de verificação que o uso da máquina de calcular foi mais notório, ajudando a formular e a testar hipóteses mais rapidamente e em maior número. Nalguns casos, o teste de conjecturas levou os alunos a refinar as suas conjecturas e a imporem restrições de aplicabilidade às regras ou métodos por eles propostos. Segundo Ponte et al. (1998), a não validação de uma conjectura deve implicar uma tentativa de a reformular. Este processo de refinamento de conjecturas não foi uma preocupação da generalidade dos alunos, embora o grupo B o tenha utilizado diversas vezes nas suas explorações:

Depois de verificada a 2.^a hipótese, é opinião do grupo que o cálculo associado ao erro ($E1 \times E2$) não é necessário uma vez que se tem a noção que ΔN é igual a metade da amplitude, obtendo-se assim uma nova fórmula:

$$C1 \times C2 = (B1 \times B2) \pm ((B1 \times E2) + (B2 \times E1))$$

(Relatório Grupo B)

A falta de hábito em procurar justificações, aliada a uma certa falta de conhecimentos, contribuiu para que o processo de *justificação de conjecturas* não estivesse contemplado ao longo do trabalho dos alunos. Para o grupo A é um aspecto que não surge com frequência no seu trabalho pois não sentem necessidade de o fazer ou não sabem muito bem como fazê-lo: “À medida que vamos fazendo, olhamos, é tão simples, se para a gente é imediato, achamos que não é preciso explicar e às vezes é necessário” (António). Apesar da notória evolução na capacidade de questionamento, na maior parte das situações, as justificações não surgiram espontaneamente da actividade dos alunos mas quando solicitadas pela professora ou pelos colegas durante a discussão das tarefas em grande grupo. O grupo B mostrou grande empenho na procura de justificações para as conjecturas formuladas, baseadas em conhecimentos adquiridos anteriormente tanto nas disciplinas de Matemática como noutras disciplinas. É aliás visível a necessidade sentida pelos alunos em justificar, mais ou menos formalmente, as suas estratégias e raciocínios, levando-os mesmo a seleccioná-los com base na maior ou menor dificuldade em justificar os resultados obtidos:

O grupo teve como primeira intenção recorrer a um método gráfico para a sua resolução. (...) Este método, após algum trabalho e desenvolvimento foi abandonado pelo grupo pela dificuldade em justificar se o método seria fiável ou não, de forma a generalizar procedimentos. (...) O grupo definiu nova estratégia e tentou de alguma forma utilizar o Teorema de Bolzano. (Relatório Grupo B)

No trabalho dos alunos, a *demonstração de conjecturas* foi um processo com uma presença ainda mais fraca do que a justificação e que envolveu muitas dificuldades pois raramente se apresentava correcta e completa. Numa fase inicial, os alunos não sentiram necessidade de provar uma conjectura que lhes parecia verdadeira e que tinha resistido a sucessivos testes. O grupo A usou algumas vezes a palavra ‘demonstrar’ com o significado de descrever o que acontece com casos particulares: “Para dar exemplos da nossa demonstração, atribuímos números ao x e y e também ao α e β ” (Relatório). Nas últimas tarefas, estes alunos tinham a clara noção de que deveriam pensar na prova das suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho mas só o tentavam fazer quando tal era explicitamente pedido pela professora nas aulas de discussão das tarefas. Já os alunos do grupo B reconhecem a importância e significado de provar as suas conjecturas. Desde a realização da primeira tarefa que mostram preocupação com este processo: “Há uma coisa que eu me lembro que é que também é importante comprovar alguns resultados. Há várias maneiras de provar uma coisa. Podes ir pela negação ou também podes ir pelo absurdo” (Carlos). Apesar de não terem conseguido demonstrar as hipóteses formuladas, há que reconhecer o esforço empreendido pelos alunos num processo que, nalguns casos, não lhes era acessível.

Estes resultados evidenciaram assim, que ao longo da experiência, os alunos gradualmente tomaram conhecimento dos vários processos matemáticos de que se podiam servir para progredir na exploração das tarefas propostas, passando a distinguir conjecturas de conclusões e a perceber a necessidade de justificar os resultados matemáticos obtidos.

APRENDIZAGENS DOS ALUNOS NA ANÁLISE NUMÉRICA

Um dos objectivos da experiência realizada era promover a aprendizagem significativa dos conceitos e processos pelos alunos envolvidos. Contrariamente ao verificado na análise anterior dos processos matemáticos gerais utilizados pelos alunos, não são notórias diferenças entre os dois grupos de estudo, ao nível das aprendizagens desenvolvidas.

A exploração das tarefas propostas permitiu a abordagem de diversos temas programáticos e serviu para focar determinados conceitos. A análise dos dados evidencia que estes conceitos foram, frequentemente, construídos pelos alunos.

A compreensão dos conceitos de *valor aproximado* e de *erro* é fundamental para abordar outros conteúdos uma vez que a análise de erros é um tema transversal a todo o programa. Estes conceitos parecem-me terem sido compreendidos pelos alunos uma vez que revelaram uma grande preocupação com os erros resultantes dos cálculos realizados, sobretudo quando surgia a necessidade de efectuar aproximações. A correcta identificação das fontes de erro e a preocupação de os diminuir ou quantificar são visíveis em várias situações:

Ao realizar os cálculos intermédios houve o cuidado de se utilizar mais um algarismo significativo do que o número de algarismos correspondente ao resultado final, de forma a se obter uma maior margem de segurança nos arredondamentos. (Relatório grupo B)

Conclui-se então que o valor aproximado é de 0,35 com um erro associado de 0,05. (Relatório grupo B)

Para encontrarmos o majorante substituímos os valores com o maior erro possível: $V = \frac{\pi(40,2)}{3}((30,3)^2 + (20,4)^2) = 17878,95\pi$.

Para encontrarmos o minorante substituímos os valores de H, R e r pelo valor por defeito: $V = \frac{\pi(39,8)}{3}((29,7)^2 + (19,6)^2) = 16798,91667\pi$.

Majorante do erro = $\frac{|17878,95\pi - 16798,91667\pi|}{2} = 540,016665$.

(Relatório grupo A)

Também na tarefa 2, à excepção de alguns casos particulares envolvendo funções polinomiais, os alunos não dispunham de ferramentas para resolver equações não lineares. O conceito de método iterativo surgiu assim de uma forma intuitiva e foi aplicado correctamente na resolução deste tipo de equações, como referido pelos alunos:

Para a determinação desta raiz recorreu-se a um método que assenta no pressuposto de, a partir de um intervalo inicial, encontrar novos intervalos tão pequenos quanto se queira, recorrendo a processos iterativos, ou seja, dividindo estes intervalos sucessivamente ao meio. (Relatório grupo B)

Assim, chegamos à conclusão que se o intervalo tiver mais casas decimais, com mais algarismos significativos, restringe-se mais o intervalo, logo o majorante do erro será cada vez menor, aproximando-se cada vez mais do valor verdadeiro. (Relatório grupo A)

Outro tópico abordado nesta disciplina, onde foram visíveis as aprendizagens, diz respeito ao *ajustamento de curvas* pelo método dos mínimos quadrados. Os alunos aperceberam-se que os ajustamentos estão associados a erros e que o objectivo é minimizá-los. Na tarefa 3, os alunos utilizaram o módulo das diferenças entre os valores experimentais dados e os valores obtidos com os diferentes modelos matemáticos que exploraram para quantificar o erro e seleccionar o melhor ajustamento. Isto indicia uma aprendizagem significativa deste conceito, tendo os alunos compreendido intuitivamente que ele está na base da construção do método dos mínimos quadrados:

Usando uma função quadrática $Y = aX^2 + bX + c$ em que $a = 0,8$, $b = 42,8$ e $c = 6,0$, obtemos os seguintes valores:

T (horas)	2	3	5	8
P ($\times 10^5$)	94,8	141,6	240,0	399,6

Comparando estes valores com os que nos são dados no enunciado, e calculando os vários erros existentes entre uns valores e outros

Pv-Pm	90-94,8	150-141,6	235-240,0	400-399,6
Erro módulo	4,8	8,4	5	0,4

(Relatório grupo A)

O grande empenho e o esforço desenvolvido, por parte dos alunos, parecem ter contribuído para uma melhor compreensão dos assuntos trabalhados, ao nível de conceitos, procedimentos e métodos. Foi na última tarefa que mais se notou a capacidade de mobilização de conhecimentos e procedimentos da Análise Numérica, adquiridos durante a realização das tarefas anteriores. Nesta tarefa, foi necessário substituir um conjunto de pontos dados por uma função que os representasse, e os alunos utilizaram os conhecimentos de *interpolação* e os de *ajustamento de curvas* para obterem as funções pretendidas:

Recorrendo à matéria da tarefa anterior, nomeadamente à nossa própria tarefa, utilizámos um polinómio do 3.º grau e verificámos que o seu gráfico passava próximo de todos os pontos. (Relatório grupo B)

Para a resolução deste problema consideremos dois métodos já nossos conhecidos. Utilizando uma função cúbica obtida pelo método dos mínimos quadrados [...]

Utilizámos também o método interpolador de Newton com diferenças progressivas. Este método é possível uma vez que os ‘pares’ estão igualmente espaçados e por ordem crescente. (Relatório Grupo A)

Segundo Mason, Burton e Stacey (1982), uma analogia entre o que está a ser estudado e uma outra situação anteriormente investigada pode ser útil para sugerir modos de abordagem. O facto de reconhecerem as ‘ferramentas’ que iam adquirindo nas tarefas anteriores e serem capazes de as utilizar, independentemente de trabalharem noutro contexto, reforça as aprendizagens realizadas.

A aquisição de conhecimentos de Análise Numérica não esgotou o processo de aprendizagem dos alunos. Apesar de não ser visível uma grande evolução no desempenho do grupo ao nível dos processos matemáticos gerais por eles usados ao longo do semestre, em particular a justificação e a demonstração, a realização destas tarefas parece ter contribuído para desenvolver neles um espírito investigativo. Várias vezes referem que, depois de explorada a tarefa, tentaram abordá-la de outra forma, pesquisando no manual ‘outra maneira de fazer’:

Como última hipótese, o grupo ainda tentou aplicar um método analítico recorrendo ao livro Fundamentos de Análise Numérica. [...]. Mas após alguns cálculos e com a sensação que nos encontrávamos a deambular numa matéria que não compreendemos na sua plenitude, adoptámos outra estratégia. (Relatório grupo B)

A capacidade de comunicação e o espírito crítico foram também alguns aspectos que os alunos referiram como fazendo parte do que consideram ser aprendizagens significativas: “É também nossa opinião que este trabalho tem o intuito de desenvolver o espírito crítico dos alunos” (Carlos).

Isto confirma, de alguma forma, a potencialidade das investigações para desenvolverem e facilitarem a aprendizagem neste nível de ensino.

FACTORES RELACIONADOS COM OS PROCESSOS E AS APRENDIZAGENS

O desempenho dos alunos nas várias tarefas realizadas teve características diferentes e parece ter sido influenciado por diversos factores. Entre eles, destacam-se a natureza da tarefa, a utilização da máquina de calcular, o trabalho de grupo e a atitude da professora. A influência destes factores não foi uniforme ao longo do trabalho realizado, no entanto, todos eles contribuíram de algum modo para a utilização ou não de determinados processos pelos alunos e para a sua própria aprendizagem.

A natureza da tarefa revelou ter alguma influência sobre os processos utilizados pelos alunos. Habitualmente considera-se que propor tarefas de investigação mais estruturadas tenderá a conduzir os alunos e a condicionar-lhes a investigação. No entanto, para alunos pouco habituados a realizar trabalho investigativo, enunciados com questões mais abertas, pode fazê-los sentir mais perdidos, desencadeando o uso de um menor número de processos, como aconteceu na última tarefa desta experiência. Pode ainda assinalar-se que o facto dos temas abordados serem situações da realidade, com as quais os alunos estavam familiarizados, resultou em efeitos contrários. Por um lado, foi referido pelos alunos como um factor positivo e do seu agrado: “Ajuda a perceber para que é que a Matemática serve. O ano passado havia vezes que eu saía da sala e pensava mas para que é que isto serve?” (Marta). Por outro, pode condicionar o trabalho, sobretudo a exploração de casos, que tendem a limitar ao que consideram ser rea-

lístico, como foi o caso da primeira tarefa, em que a exploração ficou limitada aos números positivos. Os alunos explicaram: “Na tarefa não admitimos valores nulos ou negativos porque, como estamos a trabalhar com bitolas, não pode haver diâmetros com valores negativos” (Relatório Grupo A).

A *máquina de calcular* gráfica, utilizada pelos alunos na exploração das tarefas de investigação ajudou à realização de cálculos de forma rápida, à construção de gráficos e permitiu ainda gerar um grande número de exemplos num curto espaço de tempo. Desta forma, a máquina de calcular auxiliou a utilização de alguns processos favorecendo, sobretudo, a especialização, a formulação de conjecturas e a sua verificação. Parece então legítimo concluir que a realização de tarefas de investigação que permitam a utilização da máquina de calcular pode contribuir para promover nos alunos o uso de determinados processos característicos da actividade matemática. Este facto vai de encontro ao que é defendido por Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) quando referem que a apresentação de tarefas estimulantes baseadas no trabalho com a calculadora e o computador ajudam os alunos a desenvolver uma atitude investigativa.

No seu estudo, Fonseca (2000) conclui que a *atitude da professora* e o modo como orienta as actividades de investigação pode influenciar a postura investigativa dos alunos. No presente estudo, a orientação dos alunos foi feita de forma discreta e interrogativa, devolvendo as questões, o que os levou a reflectir sobre as suas próprias dúvidas. Este aspecto foi visto por eles como um factor positivo: “Eu acho curiosa a maneira como nos tem orientado. Orienta-nos com perguntas. Na altura, se calhar nós queremos respostas mas no final acaba por ser mais produtivo” (Carlos). As orientações foram dadas no sentido de incentivar os alunos a realizar novas especializações, a melhorar a formulação de conjecturas e, sobretudo, a utilizar a justificação e nalguns casos a demonstração. Desta forma, os alunos tornaram-se progressivamente mais autónomos e melhoraram o nível da compreensão e utilização dos processos matemáticos característicos da actividade matemática.

O *trabalho de grupo* foi reconhecido, não só pelos dois grupos em análise mas pela generalidade dos alunos, como muito significativo para a aprendizagem, tendo favorecido o trabalho investigativo. A discussão entre os elementos do grupo conduziu, várias vezes, ao surgimento de variadas abordagens, a melhorias na formulação de conjecturas e ao aumento do seu número e até à justificação das mesmas. É o que se pode constatar no excerto seguinte do Relatório Grupo B: “A participação de todos os elementos facilitou bastante as respostas às questões colocadas uma vez que o universo de hipóteses foi assim superior”. Verificou-se assim que o trabalho de grupo motivou os alunos, ajudou a estabelecer um ambiente em que eles participaram activamente e facilitou a compreensão do que é a actividade matemática.

As *aulas de discussão* em grande grupo não se reduziram à apresentação dos resultados dos trabalhos mas revelaram-se fundamentais para a continuação da investigação e para aprofundar o conhecimento dos processos matemáticos envolvidos numa investigação. A interacção com os colegas favoreceu a realização de novas descobertas mostrando-lhes outras abordagens e obrigou-os a analisar as suas ideias e a justificá-las, quando questionados sobre elas:

[A discussão em grande grupo] Acho que tem vantagens por dois factores: primeiro, porque permite conhecer o trabalho de outros camaradas. São abordagens sempre diferentes a uma tarefa que tivemos de realizar e é importante ver como é que as outras pessoas reagiram nas mesmas tarefas e nas mesmas condições. Acho que é interessante por isso. Em segundo lugar há coisas que nós colocamos no papel e que nem sempre conseguimos exprimir da melhor maneira. Então, temos ali uma oportunidade para, verbalmente, tornar-se mais fácil expor o nosso modelo ou a nossa tarefa ou o nosso raciocínio. (Carlos)

O incentivo da *professora* e os seus desafios permitiram ainda aos alunos mobilizarem e desenvolverem os seus conhecimentos matemáticos.

Outros factores, ainda, têm a ver com as capacidades e conhecimentos dos alunos. A falta de experiência dos alunos na realização de trabalho de natureza investigativa na sala de aula e na elaboração de registos escritos fez surgir algumas dificuldades, sobretudo nas primeiras tarefas de investigação. Na verdade, independentemente do seu grau de estruturação, uma tarefa de investigação é menos orientada que as actividades habitualmente realizadas pelos alunos. Dada a falta de hábito dos alunos em realizar trabalho desta natureza na sala de aula, é natural que tenham experimentado, inicialmente, uma certa insegurança e mesmo desorientação perante as características deste tipo de actividade. Isso mesmo é reconhecido no Relatório do Grupo B: “A tarefa que nos foi proposta teve a princípio um grau de dificuldade bastante elevado principalmente por nenhum dos elementos estar habituado a realizar este tipo de tarefas”.

A interpretação do enunciado (saber o que é para fazer), a gestão do tempo e a organização dos alunos enquanto grupo, parecem ter sido as principais dificuldades por eles sentidas no início, sendo referidas, nas entrevistas, da seguinte forma:

Na primeira tarefa o enunciado não era muito explícito para nós e tivemos alguma dificuldade em perceber o que era pedido. E também em organizarmo-nos como grupo. (Pedro)

No início foi o tempo. Na primeira tarefa, talvez por ser a primeira, nós tivemos mais dificuldades. Tem a ver com a nossa organização, de... Se nós conseguimos olhar para o exercício e ver uma maneira de resolver. (Marta)

Os alunos, em geral, começaram por demonstrar uma grande necessidade de apoio, procurando obter da professora informações concretas quanto ao que fazer. Esta necessidade foi diminuindo significativamente à medida que se familiarizaram com este tipo de propostas, tornando-se os alunos bastante autónomos a partir da segunda tarefa.

Foram ainda identificadas grandes dificuldades associadas ao *registo escrito* das suas descobertas, um aspecto onde também foi visível a falta de experiência dos alunos. Estes evidenciaram dificuldades em iniciar a elaboração do relatório da primeira tarefa, apesar das indicações e sugestões que lhes foram disponibilizadas em forma de guião. Os relatórios produzidos inicialmente valorizavam sobretudo os produtos relativamente aos processos, reduzindo-se a uma enumeração das descobertas feitas, sem explicações das mesmas e sem apresentar quaisquer justificações. A qualidade destes relatórios foi melhorando progressivamente ao longo do semestre, em parte devido à compreensão que os alunos iam adquirindo dos processos associados a esta actividade, mas também com o auxílio dos comentários feitos pela professora. No entanto, os alunos evidenciaram sempre uma grande dificuldade na expressão escrita, a avaliar pelos seus comentários nas entrevistas:

O que mais desagradou foi o facto de não conseguirmos escrever tudo o que pensamos e todo o nosso raciocínio. (Pedro)

O facto de às vezes o relatório não transmitir todo o trabalho realizado porque não sabemos escrever exactamente para transmitir tudo o que foi trabalhado. (Miguel)

Por vezes é complicado passar para o papel todos os raciocínios. (Reinaldo)

Verificamos, assim, que os alunos experimentaram dificuldades significativas numa fase inicial, tendo conseguido superar muitas delas com o decorrer da experiência. Estas dificuldades não levaram a uma atitude negativa da generalidade dos alunos em relação a este tipo de trabalho. Pelo contrário, a maioria dos alunos mostra satisfação com a realização das tarefas de investigação, apontando razões relativas sobretudo à motivação e à promoção do raciocínio e da aprendizagem:

No meu ver, acho que as tarefas foram uma mais valia no estudo da Matemática.

Para os alunos adquirirem os conhecimentos matemáticos é necessário que se sintam muito motivados e as tarefas de investigação fazem com que os alunos se motivem e tenham interesse em resolver tarefas.

Ao início foi um bocado complicado, não sabíamos como devíamos pensar para resolver os exercícios, mas ao longo das tarefas o raciocínio ficou mais fácil e rápido.

É um processo de obrigar os alunos no raciocínio e disputa deste nas melhores soluções de resolução do problema o que concretiza o objectivo da

Matemática no treino da agilidade mental, beneficiando bastante comparativamente aos processos de memorização de matéria.

A CONCLUIR

Os resultados obtidos nesta experiência pedagógica evidenciam as potencialidades das actividades de investigação no processo de ensino-aprendizagem dos alunos e a possibilidade da sua integração na sala de aula, nomeadamente no domínio da Análise Numérica. A exploração das tarefas propostas, desenvolveu nos alunos o espírito investigativo e a compreensão de vários processos matemáticos que caracterizam a actividade matemática – nomeadamente a importância de procurar formular conjecturas e também de justificar e demonstrar as afirmações matemáticas. Isto é de registar se tivermos em conta que a capacidade de pensar matematicamente é, pelo menos, tão importante como o domínio de conhecimentos matemáticos específicos (Oliveira, Segurado & Ponte, 1998). Os processos de registo e organização dos dados, a especialização e a formulação e teste de conjecturas foram utilizados de forma semelhante pelos dois grupos de alunos e foram aqueles que surgiram mais automática e frequentemente durante a sua actividade. Já o uso dos processos de justificação e demonstração apresentou diferenças, tendo uma presença muito reduzida e surgindo poucas vezes espontaneamente num dos grupos. No entanto, evidencia-se o facto de, ao longo da experiência, os alunos terem gradualmente tomado conhecimento dos vários processos matemáticos de que se podem servir para progredir na exploração das tarefas propostas.

As tarefas serviram ainda para focar diversos temas programáticos da disciplina de Análise Numérica, facilitando o estabelecimento de ligações entre eles e dando aos alunos uma perspectiva integrada da Matemática. Os resultados do estudo mostraram ainda que determinados conceitos foram, frequentemente, construídos pelos alunos que passaram, assim, a desempenhar um papel activo no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina. O grande empenho e o esforço desenvolvido pelos os alunos parecem ter contribuído também para uma melhor compreensão dos assuntos com que trabalharam.

No que diz respeito aos factores que podem influenciar a utilização dos processos matemáticos, destacaram-se a natureza da tarefa, o trabalho de grupo, a atitude da professora e a utilização da máquina de calcular. As principais dificuldades dos alunos foram sentidas nas primeiras tarefas de investigação e prendem-se, sobretudo, com a interpretação do enunciado (saber o que é para fazer) e com o registo escrito dos seus raciocínios. Apesar das dificuldades, os alunos envolveram-se nestas actividades com entusiasmo e interesse e demonstraram um elevado nível de satisfação, referindo vantagens ao nível da motivação, da promoção do raciocínio e da aprendizagem.

Os resultados obtidos nesta experiência conduzem, assim, a uma avaliação positiva do papel que as actividades de investigação podem desempenhar na aprendizagem dos alunos, e sugerem a possibilidade da sua integração na sala de aula, como estratégia alternativa à convencional em disciplinas de Matemática do ensino superior.

REFERÊNCIAS

- Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: SEM-SPCE.
- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49.
- Burton, L. (1995). Moving a feminist epistemology of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 275-291.
- Davis, P. J. & Hersh, R. (1985). *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: F. Alves.
- Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (1994). The teaching of linear algebra in first year of French science university: epistemological difficulties, use of 'meta lever', long term organization. *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 1, 137-144.
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.
- Goldenberg, E. P. (1998). "Hábitos de pensamento": Um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, 47, 31-44.
- Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Henriques, A. (2006). *Actividades investigativas na aprendizagem da análise numérica: uma experiência no ensino superior*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e avaliação da Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

- National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.
- Oliveira, H., Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Explorar, investigar e discutir na aula de Matemática. In A. Roque & M. J. Lagarto (Orgs.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 207-213). Lisboa: APM.
- Poincaré, H. (1988). Intuição e lógica em Matemática. In *A natureza da Matemática* (pp. 7-16). Lisboa: APM.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. *Proceedings of CIEAEM 49* (pp. 3-14), Setúbal: Escola Superior de Educação.
- Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Yin, R. (2003). *Case study research: design and methods* (3^aed). London: Sage.

ACTIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO NA APRENDIZAGEM DE ANÁLISE NUMÉRICA

RESUMO:

A realização de actividades de investigação nas disciplinas de Matemática no ensino superior pode contribuir para a compreensão e consolidação de conceitos e para desenvolver o pensamento matemático dos alunos. O presente estudo indica os resultados de uma experiência de ensino em Análise Numérica em cujas aulas foram propostas diversas tarefas de investigação. O seu objectivo é compreender os processos matemáticos utilizados pelos alunos na realização destas tarefas e perceber o seu valor na promoção da sua aprendizagem. O estudo usou uma abordagem de investigação qualitativa baseada em estudos de caso de grupos de alunos. Os dados foram recolhidos, ao longo do 1.º semestre do ano lectivo de 2005/06 através de observação participante, registos áudio do trabalho de grupos de alunos, relatórios de investigação elaborados pelos alunos e entrevistas realizadas após as tarefas. Os resultados obtidos nesta experiência de ensino conduzem a uma avaliação positiva do papel que as actividades de investigação podem desempenhar na aprendizagem dos alunos, nomeadamente em Análise Numérica, e sugerem a possibilidade do seu uso na sala de aula como estratégia alternativa às convencionais.

Palavras-chave:

Actividades de investigação; Ensino superior; Processos matemáticos; Matemática; Análise Numérica; Aprendizagem.

INVESTIGATION ACTIVITIES IN LEARNING NUMERICAL ANALYSIS

ABSTRACT:

Carrying out investigation activities in higher education mathematics courses may contribute for students' understanding and consolidation of concepts and to develop their mathematical thinking. The present study reports the results of a teaching experiment in numerical analysis in which classes investigation tasks were proposed. Its aim is to understand the mathematical processes used by students in doing these tasks and analyze their value in promoting students' learning. The study used a qualitative approach based in case studies of groups of students. Data were collected during the first semester of the academic year of 2005/06 through participant observation, audio recording of the work of groups of students, students' reports of investigations and interviews carried out after the tasks were completed. The results of this teaching experiment lead to a positive evaluation of the role that investigation activities may play in students' learning, particularly in numerical analysis, and suggest the possibility of its use in the classroom as an alternative strategy to the conventional ones.

Key words.

Investigation activities; Higher education; Mathematical processes; Mathematics; Numerical analysis; Learning.

ANEXO

TAREFA 1 - ARTE DE MARINHEIRO

A *arte de marinheiro* consiste em saber aparelhar um navio a preceito. No tempo da navegação à vela, saber esta arte equivalia a possuir um diploma de instrução profissional. Ao contrário dos dias de hoje não havia marinheiro que não soubesse todos os segredos sobre cabos e nós.

O aparecimento de nós iguais em partes diferentes do globo leva-nos a concluir que alguns deles foram inventados independentemente. Julga-se que já eram usados na pré-história pelos homens das cavernas. O nó mais antigo que se conhece foi descoberto em 1923 numa turfeira na Finlândia e cientificamente datado de 7200 a.C. Também se sabe que os antigos Gregos, Egípcios e Romanos usavam nós com alguma complexidade nas construções de edifícios, pontes e fortificações pelo que não é lícito julgar que apenas os marinheiros são detentores desta arte. No que respeita ao seu uso na marinha existem registos escritos pelo menos desde o séc. XVII, mas desenhos e figuras mostram que o seu uso é muito anterior a este período.

Nós, voltas, falças, mãos, costuras, botões, pontos, pinhas, gachetas e cochins, são alguns dos trabalhos da *arte de marinheiro*. Os nós são usados quando se pretende unir um cabo a outro, ligar os chicotes do mesmo cabo ou fixar um cabo a qualquer objecto (ex: cabeça, cunho, *etc.*). Nem sempre se aprendem pelos livros: fazem-se, desfazem-se e tornam a fazer-se sempre que seja possível.

Como futuros oficiais de Marinha não podem deixar ficar mal o vosso comandante quando este vos pede ajuda em alguns cálculos...

- Q1.** Tornou-se necessário comprar cabos de amarração, pelo que é preciso escolher, entre três bitolas diferentes, duas que permitam passar dois cabos por uma buzina de 10 cm de diâmetro. Os cabos C1, C2 e C3 têm bitolas, respectivamente, de 4, 5 e 5,5 cm. Tendo em conta que as condições de utilização a que os cabos estão sujeitos (humidade, sol, *etc.*) podem influenciar em 10% a sua bitola, verifique quais os cabos que poderia escolher.
- Q2.** Na realização de trabalhos de arte de marinheiro as dimensões dos cabos poderão ter que ser subtraídas, multiplicadas e divididas. Serão capazes de determinar quais os novos limites para a bitola de um cabo resultante das operações acima mencionadas?
- Q3.** Durante uma navegação foi encontrado um objecto de forma cónica cujo volume pode ser obtido por $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2)$. Verificou-se que $R = 30 \pm 0,3$ cm, $r = 20 \pm 0,4$ cm e $H = 40 \pm 0,5$ cm. Determine um valor aproximado de V e um majorante para o erro, com 2 algarismos relevantes.

Q4. Será possível generalizar o que se passa com as operações elementares para o cálculo de erros para outras funções?...

TAREFA 2 - ÁGUAS AMEAÇADAS

A poluição das águas é, actualmente, um problema mundial muito preocupante. Lembrem-se, com certeza, do desastre do Prestige, em Novembro de 2002... Com o crescimento do comércio marítimo estas catástrofes têm ocorrido cada vez em maior número.

Já no princípio do séc. XX, com o início do transporte a granel de hidrocarbonetos por via marítima, verificou-se que esta prática comportava alguns riscos. No entanto, só com os primeiros grandes acidentes é que esta questão começou a merecer a atenção e preocupação da opinião pública.

Apesar da poluição das águas poder ser accidental, a maior parte das vezes deriva de produtos lançados, de forma não controlada e de origem diversa (poluição industrial, agropecuária, doméstica, *etc.*) com elevadas quantidades de substâncias químicas e tóxicas e, por isso, extremamente venenosas. Essa água é lançada, directa ou indirectamente, nos rios, ribeiras, lagos, albufeiras e oceanos, onde provoca graves alterações nos ecossistemas, com a morte de muitas espécies animais e vegetais. A recolonização lenta e progressiva do meio aquático só tem início após a dissipação da poluição. O intervalo de tempo necessário à recuperação do ecossistema depende de numerosos factores e varia consoante o caso.

O número de indivíduos de uma população (de determinada espécie) pode ser obtido, durante um período de tempo, pela seguinte função:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\nu}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$$

Sendo ν a taxa anual de imigração, λ a taxa anual de natalidade da população e N_0 o número de indivíduos no instante inicial.

Quando estas catástrofes ocorrem em águas interiores, os efeitos nos ecossistemas são mais graves, devido à dificuldade de renovação e depuração das águas. Foi o que se passou, em 1969, quando uma mancha de óleo flutuante no rio Cuyahoga queima durante horas em Ohio, onde o rio desagua no lago Erie. Os jornais declararam “O lago Erie está morto”.

Investigadores determinaram que, nesse momento, a população de uma espécie de peixe possuía um milhão de indivíduos, 281×10^3 imigraram para a comunidade durante o primeiro ano e ao fim de um ano existiam $1,780 \times 10^6$ indivíduos nessa população.

Q1. Represente graficamente a função $N(t)$ e encontre um intervalo $[a,b]$ que contenha um valor aproximado para a taxa de natalidade da população. Associe-lhe um erro.

Q2. Como varia o erro em função da amplitude do intervalo escolhido?

- Q3.** Partindo do intervalo escolhido na Q1 como poderá obter aproximações sucessivas (e mais exactas) para o valor da taxa de natalidade da população?
- Q4.** Será possível generalizar procedimentos de forma a propor um método de aproximação de uma raiz de uma equação não linear?

TAREFA 3 - AINDA OS LAGOS...

Através de monitorização, obtiveram-se alguns dados relativos à evolução de uma população de bactérias anaeróbias no lago Erie, com os quais se pretende descrever o crescimento da referida população.

t (horas)	2	3	4	5	6	8
p ($\times 10^5$)	90	150	----	235	----	400

- Q1.** Como podem verificar houve falhas no registo correspondente a algumas horas. Como completariam a tabela?
- Q2.** Sugira um modelo matemático que descreva a evolução da população no período considerado.
- Q3.** Qual seria a previsão do número de indivíduos dessa população para as próximas 2 horas?
- Q4.** Suspeita-se que a partir da décima hora o crescimento da população segue outro padrão. Verifique se os dados seguintes confirmam a especulação e sugira uma forma de descrever a evolução da população neste novo período.

t (horas)	10	11	12	13
p ($\times 10^5$)	550	710	940	1100

TAREFA 4 - QUEM VAI PARA O MAR...

Antes de iniciar uma missão, o imediato do navio onde o vosso grupo se encontra tem que garantir que o mesmo transporta água doce suficiente para as necessidades da sua guarnição. Durante uma operação de enchimento mediu-se a taxa do fluxo de água (caudal) para um tanque durante períodos sucessivos de 1 minuto. Os valores estão na tabela seguinte:

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q (l/min)	230	300	320	330	320	290	250	200	160	120	90

- Q1.** Como pode estimar a quantidade de água que entrou no tanque durante o primeiro minuto. E nos cinco primeiros minutos?

- Q2.** Durante o enchimento houve um alerta e o navio tem de largar no final dos 10 minutos. O imediato sabe que necessitava de encher 2,46 toneladas para garantir as necessidades mínimas sem racionamento, durante esta missão, pelo que pretende conhecer uma aproximação da quantidade de água que entrou no tanque durante esse período. Deve o imediato determinar algum racionamento se a estimação for baseada em dois tempos distintos? E se for baseada em 3?
- Q3.** Como varia o erro em função dos pontos utilizados na estimação?
- Q4.** Será possível generalizar procedimentos de forma a propor modelos de integração (ou modelos para o cálculo do valor de um integral)?