

Problemas y investigaciones en la actividad matemática de los alumnos¹

João Pedro da Ponte

Grupo de Investigação DIF

Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Resumo. As tarefas que o professor propõe determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos. Por isso, a escolha de tarefas adequadas é um dos mais importantes passos do trabalho do professor. Este artigo mostra como é importante distinguir entre tarefa e actividade e apresenta diversos tipos de tarefas característicos da disciplina de Matemática: problemas, exercícios, investigações e explorações, bem como projectos e tarefas de modelação. Contrasta estas tarefas em diversas dimensões tais como o seu grau de estruturação, o seu grau de desafio matemático, a sua duração e o contexto para que remete, analisando as respectivas potencialidades e o seu papel no ensino-aprendizagem desta disciplina.

Palavras-chave. Currículo, Matemática, Tarefas, Investigações, Explorações, Problemas, Exercícios, Modelação

Abstract. In many respects, the tasks proposed by the teacher conditionate the learning opportunities offered to students. Therefore, the choice of adequate tasks is one of the more important aspects of the teachers' work. This paper argues about the need to distinguish between task and activity and presents several kinds of tasks characteristics of the discipline of mathematics: problems, exercises, investigations and explorations, as well as projects and modelling tasks. It contrasts these tasks in several dimensions such as their degree of structure, their degree of mathematical challenge, their duration and the underlying context, analysing their potentialities and their role in teaching and learning of mathematics.

Keywords. Curriculum, Mathematics, Tasks, Investigations, Explorations, Problems, Exercises, Modelling

La creación de situaciones de aprendizaje que puedan llevar a los alumnos a desarrollar actividades ricas y productivas desde el punto de vista matemático constituye uno de los problemas fundamentales a los que se enfrenta el profesor durante su práctica profesional. A partir de determinada situación, siempre puedan formularse muchas tareas distintas, accesibles o difíciles, abiertas o cerradas, contextualizadas o no. Habitualmente, el profesor no siempre propone el mismo tipo de tarea ni siempre procede del mismo modo en el aula. Al contrario, escoge las tareas y actúa en función del desarrollo de la clase y la respuesta de los alumnos. Una buena estrategia de enseñanza normalmente está constituida por distintos tipos de tareas y, por lo tanto, uno de los principales problemas

¹ Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

del profesor en encontrar una combinación de tareas adecuada para sus alumnos. Así que, empecemos por analizar la relación entre actividad y tarea, y después presentemos los distintos tipos de tareas y discutamos su valor educativo.

Actividad y tarea

Principalmente, los alumnos obtienen el aprendizaje a partir de los factores clave: la actividad que realizan y la reflexión que efectúan al respecto. En la actualidad, esta perspectiva sobre el aprendizaje está ampliamente aceptada en la comunidad de educación matemática. Como indican Christiansen y Walther (1986), cuando se está implicado en una actividad, se realiza determinada tarea.

Dicho de otro modo, una tarea es el objetivo de la actividad. La tarea puede ser formulada por el profesor y propuesta al alumno, puede surgir por iniciativa del propio alumno y hasta puede ser negociada entre el profesor y el alumno. En cualquiera de ambos casos, cuando un alumno está implicado en la actividad matemática, está realizando cierta tarea. El profesor no dispone de medios para intervenir directamente en la actividad del alumno pero puede y debe preocuparse de la formulación de las tareas, del modo de proponerlas y de dirigir su realización en el aula.

Problemas y ejercicios

Empecemos con un problema. Para de mostrar que la noción de problema no es un concepto ni de hoy ni de ayer, he aquí un ejemplo del examen del 3.^{er} año del Instituto de 1939 (alumnos de 12 años).

En 18 kilogramos de café mezcla hay 15 kilogramos de café de S. Tomé. ¿Qué cantidad de este café habrá en 270 gramos de la misma mezcla? (Fagundes, 1942)

En realidad, este problema puede resolverse aplicando la clásica “regla de tres simple”:

$$\begin{array}{l} 18 \text{ --- } 15 \\ 270 \text{ --- } x \end{array} \quad \text{de lo que se deduce que } x = \frac{270 \times 15}{18} = 225$$

Un método alternativo, más moderno, consistiría en el uso de las fracciones:

$$\frac{18}{15} = \frac{270}{x} \quad \text{de lo que se extrae igualmente que } x = \frac{270 \times 15}{18} = 225$$

El alumno que no conozca la regla de tres simple o el modo de trabajar con las fracciones, o aquel que no consiga entender el enunciado del problema (¿qué significa “café mezcla”?) hallará grandes dificultades para resolver esta cuestión. Aquel que los conozca podrá resolver el problema con facilidad. Tanto es así que esta cuestión podrá ser un problema para ciertos alumnos de determinadas edades, mientras que para otros pasará de ser un simple ejercicio.

Se trata de un ejemplo de los clásicos problemas de mezcla cuya formulación habitual contiene los ingredientes siguientes: mezclando una cantidad x de un producto A cuyo coste unitario es m con una cantidad y de un producto B de coste unitario n ... Estos problemas cayeron en desuso, a pesar de que se bebía mucho café y, en la mayoría de casos, se consumía indistintamente la variedad robusta (originaria de África) o la variedad arábica (originaria de Arabia pero ampliamente cultivada en América Central y en Brasil...)

A pesar de que se tiene constancia desde la Antigüedad (Stanic y Kilpatrick, 1989) de que los problemas ocupan un lugar bien determinado en la enseñanza de las Matemáticas, han sido los trabajos de George Pólya (1975) los que han contribuido a clarificar su papel educativo. Para Pólya, el profesor debe proponer problemas a sus alumnos para que éstos puedan sentirse retados en sus capacidades matemáticas, y así experimentar el gusto por el descubrimiento. Pólya considera esto como una condición

fundamental para que puedan comprender la naturaleza de las Matemáticas y desarrollar su gusto por esta disciplina.

Hay que destacar que un problema siempre comporta un grado de dificultad apreciable. Sin embargo, en el caso de que sea demasiado difícil, puede hacer que el alumno desista rápidamente. Si se trata de una cuestión que él puede resolver fácilmente, entonces, no será un problema sino un ejercicio.

Después de resolver la cuestión anterior, podríamos preguntar:

1. ¿Qué porcentaje de café de S. Tomé hay en el café mezcla de la pregunta anterior?
2. Si el paquete de 18 kilogramos de café mezcla cuesta 40.000 reales [la unidad monetaria de la época], ¿cuánto cuesta un kilogramo de café?
3. Con 2.000 reales, ¿qué cantidad de café puedo comprar?

Utilizando las fracciones, no resulta difícil resolver todas estas cuestiones:

1. $\frac{15}{18} = \frac{x}{100}$ y llegamos a la conclusión de que $x = 83,33\%$
2. $\frac{40000}{18} = \frac{x}{1}$ y llegamos a la conclusión de que $x = 2\,222,2$
3. $\frac{40}{18} = \frac{2}{x}$ y llegamos a la conclusión de que $x = 0,9$.

Los resultados de los ejercicios 1 y 2 son un poco fastidiosos, porque “no dan un resultado exacto”. Probablemente, el alumno pensará que esto sucede porque el profesor “ha elegido mal los números” del enunciado.

En los problemas y en los ejercicios está perfectamente indicado lo que se da y lo que se pide. Aparte de esto, tanto unos como otros pueden colocarse en un contexto matemático e no matemático. Tratándose de cuestiones contextualizadas, está claro que se presupone algún entendimiento de dicho contexto – por ejemplo, en este caso, lo que es el café (en grano o molido), la posibilidad de hacer mezclas con varios tipos de café y las unidades implicadas (en este caso, unidades de masa y unidades monetarias).

Los ejercicios sirven para que el alumno ponga en práctica los conocimientos ya adquiridos con anterioridad y le ayudan a consolidar estos conocimientos. No obstante, para la mayoría de los alumnos, hacer ejercicios en serie no constituye una actividad muy interesante. Reducir la enseñanza de las matemáticas a la resolución de ejercicios, comporta grandes riesgos de empobrecimiento de los desafíos propuestos y de desmotivación de los alumnos. Es por ello

que los ejercicios ocupan un lugar propio en la enseñanza de las matemáticas, pero más importante que hacer muchos ejercicios será hacer ejercicios cuidadosamente escogidos, que examinen el grado de comprensión, por parte de los alumnos, de los conceptos fundamentales.

Investigación y exploración

Veamos ahora otro tipo de cuestiones:

1. Ve a supermercado y comprueba si existen distintos tipos de paquetes de café de una misma marca. En caso de que estuvieras interesado en adquirir una gran cantidad de café (por ejemplo, para suministrar al bar de la escuela), ¿cuál sería la mejor opción de compra?
2. Para el paquete de 250 gramos, analiza los precios de las distintas marcas que se ¿Qué más puedes decir acerca de la distribución de los precios? ¿Cuáles pueden ser las razones que hacen que unas marcas ofrezcan precios más bajos y otras ofrezcan precios más altos?

Cualquiera de estas tareas puede constituir un acto de investigación para un alumno de 12-13 años. Aunque faciliten información y planteen cuestiones, ambas todavía dejan mucho trabajo pendiente para el alumno, ya sea en términos de elaboración de una estrategia de resolución, o en términos de la formulación específica de las propias cuestiones para resolver.

Para responder a la primera pregunta, fui a ver los precios de varias marcas de café de un supermercado de mi barrio. Los resultados obtenidos se indican en la tabla 1. Para no complicar los datos, solamente presento los valores de algunos tipos de café (“lotes”) de tres marcas.

Tabla 1. Marcas, lotes y precios de diversos tipos de café

Marca	Lote	Peso (Gramos)	Precio (Euros)
N	Superior	250	2,64
	Superior	1000	11,99
	Normal	250	1,89
	Normal	1000	7,56
	Descafeinado	250	2,64
S	Normal	250	1,99
	Normal	1000	7,96
D	Normal	250	1,79
	Normal	1000	8,47
	Superior	1000	11,99

Para adquirir una gran cantidad de café, lo más práctico sería comprar paquetes de 1 kilo. De las tres marcas disponibles, la que ofrece precios mejores es la N, en el lote normal (7,56 €). Si lo que queremos es un café de tipo superior, los precios de las dos marcas que ofrecen esta variedad son iguales. Está claro que en la compra de un buen café, el criterio determinante, debe ser el sabor y no el precio. De cualquier forma, será conveniente comprobar si el precio que se nos pide es exorbitante (en comparación con otras marcas) por nuestro café preferido.

No sería mala idea analizar los valores que tendríamos que pagar por la misma cantidad de café, comprada en paquetes más pequeños de 250 gramos. Una forma sencilla de hacerlo consiste en añadir una columna a la tabla (tabla 2), indicando el peso por kilo. Ya conocemos este valor para los paquetes de 1 kilo y para los demás, tampoco resulta difícil de calcular.

Ante nuestra sorpresa, descubrimos que si compramos nuestro café de tipo superior en paquetes pequeños podemos ahorrar bastante dinero. Por cada kilo, en vez de 11,99 €, solo tenemos que gastar 10,56 €, o sea, casi un euro y medio menos. Si queremos el café más barato posible –en momentos de dificultades económicas puede ser la única solución –, entonces, la mejor estrategia consiste en comprar paquetes de 250 gramos, de la marca D, lote normal.

La importancia de la realización de investigaciones matemáticas por parte de los alumnos ha sido defendida por numerosos autores, por ejemplo, Mason (1996) y Goldenberg (1999). En Portugal, el proyecto MPT² (Abrantes, Leal y Ponte, 1996; Abrantes, Ponte, Fonseca y Brunheira, 1999) produjo un destacado trabajo en este campo, que tiene continuidad en el sitio *Investigar e Aprender* (<http://ia.fc.ul.pt>). Los argumentos principales esgrimidos para justificar la importancia de las investigaciones, más que los problemas, fomentan la implicación de los alumnos, puesto que exigen su participación activa desde la primera fase del proceso: la formulación de las cuestiones por resolver³.

Tabla 2

Marca	Lote	Peso (Gramos)	Precio (Euros)	Precio por Kilogramo
N	Superior	250	2,64	10,56
	Superior	1000	11,99	11,99
	Normal	250	1,89	7,56
	Normal	1000	7,56	7,56
	Descafeinado	250	2,64	10,56
S	Normal	250	1,99	7,96
	Normal	1000	7,96	7,96
D	Normal	250	1,79	7,16
	Normal	1000	8,47	8,47
	Superior	1000	11,99	11,99

De todo ello se deduce que cabe destacar dos dimensiones fundamentales de las tareas: el grado de dificultad y el grado de estructura. La dificultad es una dimensión muy empleada para graduar las cuestiones que se proponen a los alumnos, tanto en aula como en momentos especiales de la evaluación, por ejemplo, durante los controles o los exámenes. Naturalmente, varía entre los pólos “accesible” y “difícil”. La estructura es

² N. de la T.: Proyecto MPT: Proyecto Matemáticas Para Todos.

³ En la introducción del libro *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (Abrantes, Ponte, Fonseca, Brunheira, 1999) puede consultarse una argumentación detallada a favor de la introducción de las actividades de investigación en el currículo de las matemáticas.

una dimensión que hace poço tiempo que há empezado a merecer nuestra atención. Varía entre los pólos “abierto” y “cerrado”. Una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide y una tarea abierta es la que comporta un grado de indeterminación significativo en lo que se da, lo que se pide, o en ambas cosas.

Cruzando estas dos dimensiones, se obtienen cuatro cuadrantes. Teniendo en cuenta las propiedades correspondientes, podemos situar en ellos los tres tipos de tareas que hemos presentado previamente (véase el cuadro 1):

- Un *ejercicio* es una tarea cerrada y accesible (2.º cuadrante).
- Un *problema* es una también cerrada, pero que entraña una dificultad elevada (3.º cuadrante).
- Una *investigación* entraña un grado de dificultad elevado pero es una tarea abierta (4.º cuadrante).

Todavía nos queda el 1.er cuadrante, el de las tareas relativamente abiertas y fáciles, que designaremos como tareas de *exploración*. En realidad, no todas las tareas abiertas comportan un grado de dificultad elevado. Así, entre las tareas de exploración y de investigación, la diferencia está en el grado de dificultad. Si el alumno pudiera empezar a trabajar desde entonces, sin mucha planificación, estaríamos ante una tarea de exploración. En caso contrario, seria mejor hablar de una tarea de investigación.

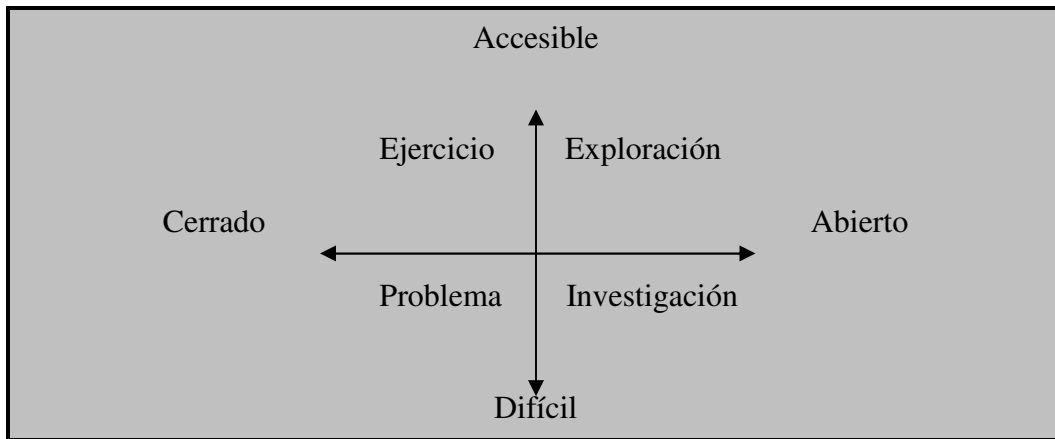
La línea de demarcación entre las tareas de exploración y los ejercicios no es siempre muy nítida. Un mismo enunciado puede corresponder a una tarea de exploración o a un ejercicio, según los conocimientos previos de los alumnos. Por ejemplo, consideremos la cuestión propuesta anteriormente: “¿Cuál es el valor médio de los paquetes de café del supermercado?” Si los alumnos ya han aprendido a determinar el

valor medio, ya sea informalmente, ya sea mediante la expresión $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ se

tratará de un simple ejercicio. Si los alumnos todavía no han aprendido a calcular la media de un conjunto de valores, será una tarea de naturaleza exploratoria, en que ellos tienen que movilizar sus conocimientos intuitivos. Muchas veces, existe la idea de que los alumnos no pueden realizar una tarea si no se les ha enseñado directamente como resolverla. Es una idea falsa. Los alumnos aprenden muchas cosas fuera de la escuela que pueden ser utilizadas en la clase de matemáticas. Muchas veces es más eficaz, en

términos de aprendizaje, que ellos descubran un método propio para resolver una cuestión que esperar que ellos aprendan un método del profesor y sean capaces de reconocer, ante determinada situación, como aplicarlo.

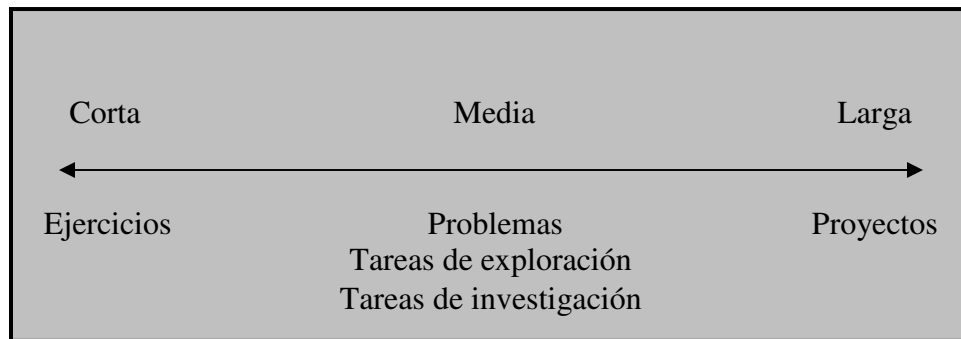
Cuadro 1. Los distintos tipos de tareas, según el grado de dificultad y de apertura



Los diferentes tipos de tareas

Existen dos nuevas dimensiones de las tareas que son de gran importancia: la duración y el contexto. En lo que se refiere a la duración de una tarea matemática puede precisar de unos pocos minutos o durar días, semanas o meses. Dicho de otro modo, la duración de la tarea puede ser corta o larga, tal como se indica en el cuadro 2. Un ejemplo de una tarea de larga duración, que divide muchas de las características de las investigaciones, es un *proyecto*. Las tareas de larga duración pueden ser muy ricas y permitir aprendizajes profundos e interesantes, pero comportan un elevado riesgo de que los alumnos se dispersen por el camino, se bloqueen, pierdan el tiempo con cosas irrelevantes o la abandonen a medias.

Cuadro2. Diversos tipos de tareas, según la duración



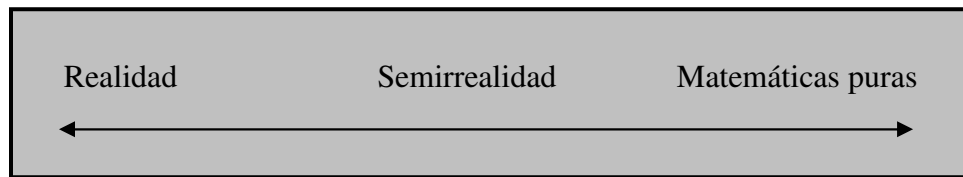
Finalmente, el contexto constituye una dimensión importante que debe tenerse en cuenta. En este punto, los pólos vienen determinados por las tareas encuadradas en un contexto de la realidad y las tareas formuladas en términos puramente matemáticos. Skovsmose (2000), en un interesante artículo, todavía distingue un tercer contexto que designa como “semirrealidad” y que es extremadamente frecuente en los problemas y ejercicios de matemáticas. Aunque aparentemente se pongan en entredicho situaciones reales, para el alumno, estas pueden no significar gran cosa. Dejando de lado este aspecto, la mayoría de las propiedades reales de las situaciones no se tienen en cuenta. La atención apenas se focaliza en la propiedad o las propiedades que interesan a quien ha enunciado la cuestión y en estas donde se supone que debe centrarse el alumno. Por eso, para el alumno, acaba por ser un contexto casi tan abstracto como el contexto de las matemáticas puras. Unos cuantos apartados antes, hemos señalado que los resultados de los ejercicios 1 y 2 no daban “un resultado exacto”. Para el alumno, este hecho es una indicación importante de que no se trata verdaderamente de cuestiones pertenecientes a la realidad pero sí a la semirrealidad. En realidad, el café se vende al público en paquetes de 1 kilo o 250 gramos y su precio no es nunca un decimal infinito...

Las llamadas *tareas de modelación* son, en el fondo, tareas que se presentan en un contexto de realidad. Dichas tareas, en general, entrañan una naturaleza problemática y desafiante, además de dar lugar a problemas o investigaciones, de acuerdo con el grado de estructuración del correspondiente enunciado. También es frecuente hablar de *aplicaciones* de las matemáticas. Según su naturaleza, se trata de ejercicios o problemas de aplicación de conceptos e ideas matemáticas. Asimismo, hay que señalar que los

ejercicios, problemas, investigaciones y exploraciones, tanto pueden surgir en contextos de realidad como de semirrealidad o de matemáticas puras (véase el cuadro 3).

Entonces, se plantea la cuestión de las tareas que el profesor puede proponer en el aula. En la práctica, a veces no se da cuenta de que pueden existir otros tipos de tareas. Varios documentos de orientación curricular, como el *Relatório Matemática 2001* (APM, 1998) o las *Normas profissionais* (NCTM, 1994), recomiendan que el profesor diversifique, en la medida de lo posible, las tareas propuestas a los alumnos.

Cuadro 3. Diversos tipos de tareas, según el contexto



Cuadro 4. Cuadro comparativo de los distintos tipos de tarea

CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS	EJEMPLOS	POTENCIALIDADES
Naturaleza más cerrada	Ejercicios, problemas	Importantes para el desarrollo del raciocinio matemático del alumno, caracterizado por una relación estrecha y rigurosa entre datos y resultados.
Naturaleza más accesible	Exploraciones, ejercicios	Conceden al alumno un elevado grado de éxito y de desarrollo de la confianza en sí mismo.
Naturaleza más desafiante	Investigaciones, problemas	Indispensables para que los alumnos vivan una experiencia matemática efectiva.
Encuadradas en contextos reales	Tareas de aplicación y de modelación	Importantes para que el alumno se dé cuenta del modo como se utilizan las matemáticas en muchos contextos y para aprovechar su conocimiento de estos contextos.
Formuladas en contextos matemáticos	Investigaciones, problemas, exploraciones.	Permiten que el alumno se dé cuenta de como se desarrolla la actividad matemática de los matemáticos profesionales.

¿Cuál poderá ser la combinación de tareas más adecuada en la enseñanza de las matemáticas? Esta pregunta, formulada en términos tan abstractos, no se puede responder. Al seleccionar las tareas para sus grupos, el professor deberá tener en cuenta toda una série de factores, entre los que se encuentran:

- Características de cada uno de los tipos de tarea.
- Capacidades y los intereses de los alumnos.
- Historia anterior de trabajo en grupo en el aula (véase el cuadro 4).

Las tareas son un elemento fundamental en la caracterización de cualquier currículo, puesto que determinan en gran medida las oportunidades de aprendizaje ofrecidas a los alumnos. Una vez propuesta, una tarea puede originar actividades muy diversas, dependiendo de la capacidad y la actitud de los alumnos y el modo de actuación del profesor. La forma de trabajar en el aula, la forma de negociar con los alumnos la resolución de las tareas, los papeles asumidos por el profesor y por los alumnos, todo ello ejerce una gran influencia en los aprendizajes que estos obtendrán. La selección de las tareas adecuadas es solo uno de los aspectos de la labor del profesor, pero es un aspecto fundamental dirigido a la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje para los alumnos.

Referencias bibliograficas

- Abrantes, P., Leal, L. C., & Ponte, J. P. (Eds.). (1996). *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM e Projeto MPT.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- APM. (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.
- Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: APM e Projecto MPT.

- Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados, e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 73-88). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: IIE e APM.
- Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.