

PROBLEMAS DE MATEMÁTICA E SITUAÇÕES DA VIDA REAL

JOÃO PEDRO DA PONTE

Departamento de Educação da F. C. da U. L.

A aprendizagem da Matemática não se limita apenas à apreensão de conceitos e técnicas para posteriormente usar em estudos de novos conceitos ou técnicas (mais avançados) ou em simples aplicações na vida prática. A força motora do desenvolvimento da ciência Matemática são os problemas e não é por isso de estranhar que a actividade de Resolução de Problemas constitua uma importante orientação curricular para o ensino desta disciplina. Trata-se assim de permitir ao aluno que este lide também com situações complexas, enfrente dificuldades, tome decisões, corra riscos e viva momentos genuínos de descoberta.

Um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente. Distingue-se de um simples exercício na medida em que este exige apenas a aplicação de um método de resolução já bem conhecido.

No entanto, devido talvez à grande amplitude do movimento criado à volta da Resolução de Problemas, nem todos os que se debruçam sobre a sua introdução na prática educativa partilham necessariamente as mesmas perspectivas. Para alguns, parece tratar-se essencialmente duma *solução* que poderá ajudar, quiçá de forma decisiva, a acabar com o insucesso no ensino desta disciplina. Para outros, a sua inclusão nas orientações curriculares constitui acima de tudo mais um *problema* que é necessário considerar nas suas diversas implicações, incluindo o desenvolvimento das capacidades dos alunos e sua avaliação, e a formação de professores.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A Resolução de Problemas constitui um importante conceito na Didáctica da Matemática. No

entanto, é um conceito com um passado significativo e não isento de ambiguidades.

A Resolução de Problemas como Orientação Curricular

Como conceito educativo, a Resolução de Problemas tem atrás de si uma longa história. Já era discutida no princípio do século por teóricos da educação como John Dewey (veja-se o seu *How We Think*, 1910). Mereceu por exemplo nos anos 40 grande atenção da parte de educadores como William Brownell que sobre ela escreveu em termos de investigação e de sugestões didáticas (ver Lester, 1980 b). Mas foi a partir dos escritos e da acção do grande matemático George Polya (notavelmente do seu livro, *How to Solve It*, publicado originalmente em 1945), que esta actividade começou a ser olhada como fundamental no ensino desta disciplina.

A ideia de problema tem profundas tradições no ensino da Matemática. Assim, por exemplo, o ensino clássico da Geometria, que em tempos idos constituía a parte de leão dos programas a nível secundário, andava muito à volta de problemas, em especial, dos célebres problemas de construção com régua e compasso. Os antigos exames, tanto a nível liceal, como na admissão à Universidade, baseavam-se igualmente em problemas, muitos dos quais de difícil resolução.

Com a reforma do ensino conhecida por Matemática Moderna, na década de 60, a atenção ia mais para os conceitos e as estruturas. A grande preocupação era ensinar o mais cedo possível as matérias mais abstractas e mais avançadas. O papel privilegiado atribuído às estruturas mais pobres, nomeadamente de natureza algébrica, não favoreceu o desenvolvimento de actividades relacionadas com os processos mais complexos de pensamento como a Resolução de Problemas.

Mas quando esta forma entrou em declínio, em meados da década de 70, a Resolução de Problemas emergiu como uma orientação pedagógica alternativa. Assim, em 1976, em plena época da reacção *back to basics*, a Resolução de Problemas foi incorporada na lista de competências básicas (*basic skills*) relativas à disciplina da Matemática apresentada pelo National Council of Supervisors of Mathematic (NCSM, 1976).

Pouco depois, a Associação de Professores de Matemática dos EUA (NCTM, 1980) propunha um conjunto de grandes orientações curriculares, entre as quais sobressaía logo em primeiro lugar a ideia de que «a Resolução de Problemas deveria constituir o foco da Matemática escolar» (p. 2). O NCTM propunha que «o currículo de Matemática fosse organizado em torno da Resolução de Problemas» (p. 2), dando uma atenção muito especial às aplicações da Matemática.

Um movimento semelhante teve lugar noutros países. Por exemplo, em Inglaterra surgia em 1982 o relatório Cockcroft (*Mathematics Counts*), defendendo igualmente que a Resolução de Problemas, incluindo a aplicação da Matemática a situações do dia-a-dia, deveria constituir uma das actividades fundamentais a desenvolver no ensino desta disciplina.

Portugal, participou activamente na Matemática Moderna, especialmente devido à acção de José Sebastião e Silva, que, diferenciando-se das orientações então mais prevalentes, tinha em alta consideração a Resolução de Problemas (Silva, 1978). Após a morte de Sebastião e Silva, Portugal isolou-se do movimento internacional do ensino da Matemática, situação que durou até ao princípio da década de 80. Durante este interregno pouco se publicou no nosso país que possa ser referenciado como «Didáctica da Matemática». Mas sabe-se que nessa altura as atenções principais iam para os aspectos marcadamente científicos, a psicologia da aprendizagem e a chamada «pedagogia por objectivos».

Com o reatar das relações internacionais e uma reafirmação do pensamento no âmbito da didáctica desta disciplina, começaram naturalmente a ter de novo eco as ideias relativas à Resolução de Problemas.

No I Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática, Duarte, Silva e Queiró (1981), relatando uma experiência realizada na Região Centro, discutiam o interesse da realização de concursos de problemas do tipo «Olimpíadas» para chamar a atenção para a Matemática, tentando desse modo estimular o interesse dos alunos. Tratava-se de explorar, fundamentalmente numa lógica de extensão extra-lectiva, as potencialidades motivacionais dos problemas.

Numa perspectiva algo diferente, mais directamente ligada à prática pedagógica, Ponte e Abrantes (1982) defendiam a necessidade de rea-

quacionar o ensino desta disciplina, dando um papel-chave aos problemas. O estudante deveria ser chamado a uma participação activa, assumindo o papel do matemático. Um problema pode motivar outros problemas, e desta actividade surge de forma viva a Matemática. A resolução de problemas era assim vista como parte integrante do trabalho normas desta disciplina, contando para avaliação. E davam-se diversas sugestões de natureza didáctica, entre as quais a prática do problema da semana.

O interesse por este tema cresceu muito rapidamente. Particularmente desde 1986, data da criação da Associação de Professores de Matemática, a Resolução de Problemas tem vindo a ser objecto de numerosos artigos da mais diversa natureza: enunciados de problemas e sua discussão, propostas de actividades a realizar com os alunos, relatos de experiências, etc.. Dos documentos produzidos destaca-se especialmente um conjunto de orientações curriculares (APM, 1988), na qual a Resolução de Problemas é apresentada como «uma linha de força que, «atravessando» todo o currículo, (deverá orientar) a definição dos seus objectivos, a proposta de metodologias, a selecção dos conteúdos e processos de avaliação» (p. 32).

Ensino enriquecido com problemas

A literatura portuguesa e internacional sobre a Resolução de Problemas mostra que esta actividade pode ser encarada de forma bem diversa nos programas de Matemática e na prática pedagógica dos professores. Uma primeira perspectiva situa-se essencialmente numa linha de continuidade em relação ao ensino actual. Reconhecendo que há aspectos que deverão mudar, considera igualmente que há outros aspectos que terão de permanecer. Podemos talvez chamar-lhe ensino «enriquecido» com problemas.

Esta linha de pensamento sublinha que a ideia de problema não é de facto nova no ensino da Matemática. Considera mesmo que tanto no passado recente como hoje em dia, de alguma maneira, os problemas já têm um lugar no ensino da Matemática. Estão presentes associados à proporcionalidade, às equações e sistemas de equações, à análise combinatória, às probabilidades, à trigonometria, e mesmo a outros conteúdos programáticos. Considera contudo que os problemas, embora presentes nos programas, têm uma importância bem mais reduzida do que seria desejável.

Assim, o que será de pôr em causa é a variedade, a quantidade e a natureza dos problemas — não propriamente a sua existência. Será de questionar se, para além dos problemas usualmente propostos, não se poderiam propor outros, de outros tipos. Se não se deveriam propor mais problemas. Se alguns problemas não são mal escolhidos. Se não se

deveria alargar o conceito de problema, de forma a envolver, por exemplo, actividades de modelação de situações da vida real. Sobretudo, o que parece estar mal é a total inexistência de uma «cultura» sobre resolução de problemas como actividade pedagógica.

Nesta perspectiva, os problemas são vistos como requerendo conhecimentos de base, conceitos e técnicas, cuja aprendizagem não deve ser descurada. O currículo de Matemática continuará organizado por temas de trabalho bem definidos, nos quais sobressaem conceitos-base, mas muito mais atenção é dada aos problemas, indicando claramente como se articulam com os restantes conteúdos e actividades, e dando indicações acerca da forma como a sua resolução deverá ser conduzida. A resolução de problemas não é tudo. É uma actividade importante mais é uma actividade ao lado de outras.

Parece ser esta a visão do NCTM (1980) quando diz que «a Matemática a ensinar (não deve ser vista apenas) como a Matemática necessária num dado momento para resolver um dado problema. A unidade estrutural e as inter-relações do todo não devem ser sacrificadas» (p. 2). E acrescenta: «os programas de Matemática devem ser concebidos para equipar os alunos com os métodos matemáticos que suportam todo o tipo de resolução de problemas, incluindo os conceitos tradicionais e técnicas de cálculo (...), os sistemas de números racionais e reais, a noção de função, o uso de simbolismo matemático para descrever situações da vida real, o uso de raciocínio dedutivo e indutivo para tirar conclusões acerca destas relações, e as noções geométricas tão úteis para as representar...» (p. 2-3).

Os problemas como ponto de partida para a aprendizagem

Numa segunda perspectiva, a ideia-chave é que é preciso «partir de problemas». Por exemplo, em APM (1988) defende-se que «o conhecimento matemático deve emergir dos problemas e da experiência com a resolução de problemas» (p. 44), entendendo-se por problemas uma variedade de situações, de natureza explícita ou apenas potencialmente problemática.

A organização de base do processo de ensino/aprendizagem será agora diferente: os conteúdos tradicionais poderão ser substituídos por «grandes temas de trabalho». Haverá menos matéria explicitamente prescrita (tanto em termos de conceitos como em termos de competências), e por consequência mais variabilidade e flexibilidade curricular. Num caso limite, poder-se-á chegar a um «currículo organizado por actividades» (embora fique em aberto saber quais os fios con-

dutores que darão coerência a esse tipo de currículo).

Como ajudar os alunos a desenvolver a sua capacidade de resolver problemas

Para além de se propor aos alunos problemas para resolver é preciso pensar como é que estes podem desenvolver as suas capacidades. Será conveniente ensiná-los explícita e deliberadamente a resolver problemas? Uma preocupação com este aspecto pode fundamentar uma terceira hipótese de orientação curricular e será desenvolvida em pormenor um pouco mais adiante.

Notemos no entanto de passagem, que em Portugal a questão das actividades de ensino mais adequadas ao desenvolvimento das capacidades de Resolução de Problemas tem sido um assunto muito pouco discutido. Parece haver um certo receio de que ao procurar-se ensinar a Resolver Problemas se reduza inevitavelmente a «dar receitas», tirando a graça aos problemas, quebrando toda a mística do processo e reproduzindo, ao fim e ao cabo, o esquema do ensino mais tradicional.

Antes de prosseguir, vejamos ainda alguns aspectos de terminologia. A distinção entre problema e exercício (já referida) é consensualmente aceite, mas não parece ser entendida por todos da mesma maneira. Para alguns esta distinção parece simples e óbvia, enquanto outros sublinham que não há uma linha divisória clara mas antes diversos escalões intermédios, sendo algumas questões difíceis de classificar. E no que se refere ao papel educacional dos exercícios as divergências parecem ser irreconciliáveis: prática a banir, prática a usar com alguns cuidados, ou meio por excelência de aprendizagem da Matemática?

Duas outras clarificações são igualmente importantes. Uma refere-se à distinção entre um *problema* e uma *situação problemática* (ou *investigação* ou *exploração*). Num problema existe uma formulação mais ou menos explícita do que é dado e do que é pedido. Numa situação problemática existe um grau grande de indefinição acerca de um e outro, pressupondo-se que cabe ao próprio aluno um papel importante na sua precisão.

Por outro lado, é pertinente distinguir entre os *problemas puramente matemáticos* e os *problemas da vida real*, porque a sua resolução envolve processos de raciocínio bem diferenciados. Não são raros os autores que consideram apenas problemas puramente matemáticos, embora, como vimos, tanto as orientações do relatório Cockcroft (1982), como do NCTM (1980) e da APM (1988) sublinhem a importância de considerar ambos os tipos.

O ENSINO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Sendo importante que os alunos sejam capazes de resolver problemas, interessa saber como se pode conseguir que eles desenvolvam as suas capacidades. Infelizmente, a investigação a este respeito não é muito conclusiva, embora isso se possa por vezes ficar a dever mais a deficiências da metodologia (tempo de intervenção muito curto, instrumentos de avaliação pouco sensíveis e pouco rigorosos) do que a limitações intrínsecas às próprias propostas didácticas ensaiadas.

Mas não devemos ficar surpreendidos pelo facto de não surgirem resultados simples e facilmente aplicáveis. Não é de admirar que seja complicado ensinar os alunos a melhorar de forma substancial a sua capacidade de resolver problemas. Ao fim e ao cabo, ensinar a resolver problemas há-de ser bem mais difícil do que ensinar a calcular o valor de expressões numéricas ou resolver equações do 1.º grau! Mas vejamos brevemente as diversas abordagens que têm sido propostas.

Na linha das sugestões de Polya (1945), o ensino de *Heurísticas Gerais*, constitui uma das propostas mais conhecidas. Heurísticas gerais são grandes sugestões ou estratégias, correspondentes a «operações mentais», em princípio aplicáveis a muitos problemas, cuja consideração poderá ajudar na sua resolução. Polya (1945) propunha um modelo em que a resolução de um problema era decomposta em quatro fases, cada uma das quais com o seu conjunto associado de heurísticas.

O alcance das heurísticas pode variar. Estas podem ser mais gerais, como as indicadas por Frederiksen (1984), ou mais específicas como as sugeridas por Polya (1945), Schoenfeld (1980) e Wickelgren (1974). Entre as heurísticas mais específicas podemos indicar por exemplo: *a)* desenhar um diagrama; *b)* procurar regularidades; *c)* estabelecer objectivos intermédios; *d)* trabalhar do fim para o princípio; *e)* usar tentativa e erro; *f)* provar por contradição; *g)* tentar usar o método de indução; *h)* reduzir o número de variáveis; etc.. Cada uma destas heurísticas pode ser particularmente útil para certos problemas e basicamente irrelevantes para outros.

A questão é que muitas vezes não é óbvio qual é a heurística mais apropriada para ajudar a resolver um dado problema. O aluno pode ter muita dificuldade tanto em a seleccionar como em a aplicar. Para Lesh (1985), compreender uma dada heurística ou processo significa: *a)* saber quando deve ser usada; *b)* saber como se relaciona com outras heurísticas; *c)* saber que concretização dessa heurística melhor se adequa a uma dada situação; e *d)* saber que a heurística pode servir diferentes funções em diferentes pontos do processo de resolução do

problema. Apesar disso, este modelo tem servido de base à maior parte do trabalho realizado com vista a melhorar as capacidades dos alunos na resolução de problemas, muito em especial dos alunos dos níveis etários mais avançados (ver, por exemplo, Schoenfeld, 1980).

O *Desenvolvimento de Capacidades Instrumentais específicas (specific tool skills)* constitui uma segunda abordagem (Lester, 1980a, 1980b). Estas capacidades correspondem a técnicas que devem ser dominadas para que uma dada estratégia geral possa ser usada. Elas facilitam o planeamento dum ataque, ajudam a organizar a informação relevante, e ajudam a encontrar uma estratégia. Em geral, procura-se ensinar técnicas como construir uma tabela, traduzir frases da linguagem corrente em forma simbólica, desenhar diagramas, estimar, construir equações, classificar dados. Por exemplo, um professor pode demonstrar como construir uma tabela ajuda a resolver um dado problema. Indica como a tabela permite organizar e manter o controlo da informação. Posteriormente os alunos praticam a leitura e construção de tabelas e resolvem problemas para os quais as soluções são facilitadas pela construção de tabelas (Lester, 1980b).

Estimular no aluno o desenvolvimento das suas competências no que respeita aos *Processos Metacognitivos* constitui uma terceira possibilidade de melhorar a sua capacidade de resolução de problemas. Os processos metacognitivos têm a ver com o pensamento acerca do próprio pensamento. Podemos identificar duas vertentes. Por um lado, o conhecimento dos conhecimentos, respeitando ao que a pessoa sabe acerca das suas próprias capacidades e recursos, assim como das suas concepções sobre a Matemática. Por outro lado, a gestão ou controlo dos conhecimentos diz respeito à forma como toma decisões para seleccionar e gerir estratégias e acções práticas com vista à resolução de um problema (Fernandes, 1989).

Alguma investigação realizada no quadro da chamada ciência cognitiva aponta no sentido de que as actividades metacognitivas desempenham um papel fundamental no êxito ou fracasso na resolução de um dado problema. Assim, Fernandes (1989) refere três razões para procurar desenvolver os processos metacognitivos dos alunos: *a)* tornando-se mais conscientes dos seus conhecimentos, eles podem usá-los de forma mais sistemática e organizada; *b)* facilitar-lhes a capacidade de usar uma maior variedade de estratégias, de forma mais flexível; e *c)* levá-los a corrigir concepções e convicções erradas.

A *Demonstração* pelo professor da formulação duma estratégia e da execução dos passos relevantes, exemplificando com problemas seleccionados, constitui uma quarta forma de ensinar os alunos a resolver problemas (Lester, 1980b). E, finalmente, outra abordagem dá grande importância à *Prática da Resolução de Problemas* por parte do aluno. É

uma actividade considerada fundamental mesmo entre os proponentes de algumas das propostas anteriores (por exemplo, Wickelgren, 1974). Entre os problemas propostos, alguns poderão ter mais de uma resposta, outros poderão não ter solução. Alguns problemas poderão ser resolvidos por mais de um processo. Alguns problemas podem de algum modo estar relacionados com outros, constituindo por exemplo suas extensões. Os alunos poderão ser encorajados a resolver um certo número de problemas por semana ou por mês, sendo alguns destes depois discutidos com toda a turma (Lester, 1980b).

Qual dos métodos é mais indicado pode depender do grupo de alunos em causa, da sua experiência anterior em resolução de Problemas, da sua capacidade em Matemática, do seu nível etário, etc.. Lester (1980b), considera não existir evidência que indique superioridade de método sobre qualquer outro, e recomenda que se use uma combinação de todos eles. Uma proposta concreta de um sistema instrucional com diversas componentes é apresentada, por exemplo, em Charles (1982).

Mas para além dos métodos há ainda a questão dos requisitos. A importância de uma base de conhecimentos sólida como pré-requisito para uma boa capacidade de Resolução de Problemas é sublinhada por numerosos autores (Fernandes, 1989; Frederiksen, 1984). Kantowsky (1977), uma investigadora que estudou o processo de utilização de estratégias heurísticas por parte dos alunos, indica que um mínimo de enraizamento em conteúdos pode ser necessário para que as heurísticas tenham onde se apoiar e possam assim ser de alguma utilidade para o processo de resolução do problema. Estas observações sugerem uma limitação essencial à ideia de que a Resolução de Problemas poderá ser a base da aprendizagem da Matemática. Se se pretende que os alunos consigam resolver problemas significativos, uma sólida base de conhecimentos será fundamental, e terá que ser adquirida pela articulação de diversas actividades de aprendizagem, algumas das quais claramente orientadas para o desenvolvimento de conceitos ou de saberes-fazer específicos.

A APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA A SITUAÇÕES DA VIDA REAL

Saber Matemática não significa forçosamente ter facilidade em a aplicar a situações da vida real (ou mesmo a situações de outras disciplinas escolares). Na Matemática as questões aparecem usualmente bem definidas e são susceptíveis de um tratamento formal e rigoroso. Na vida real já assim não acontece. As coisas aparecem normalmente mal definidas, imprecisas, fortemente interligadas umas com as outras. São por isso diferentes as com-

petências necessárias para ter sucesso na Matemática usual e nas aplicações. Se pretendermos que os alunos, para além de saber Matemática, saibam também como a aplicar, então temos de dedicar atenção a ambas as competências no processo de ensino/aprendizagem.

Por exemplo, Rubin, Rosebery e Bruce (1988), ao estudar as potencialidades de diversas ferramentas computacionais para o ensino da Estatística, concluíram que as pessoas dum modo geral não usam os princípios estatísticos apropriados quando raciocinam acerca dos acontecimentos da vida real, preferindo usar raciocínio causal simples ou associativo (p. 5). Segundo estes autores, as pessoas têm uma tendência para interpretar as situações como sendo ou de natureza estatística ou de natureza não estatística, mostrando grande dificuldade em integrar estes dois tipos de conhecimento para resolver problemas concretos (p. 6). Na sua perspectiva, esta tensão entre o raciocínio do dia-a-dia e o raciocínio estatístico pode ser uma fonte significativa de dificuldades para os alunos (p. 6).

A questão das *relações entre diversos tipos de conhecimento* tem uma grande importância na educação matemática e prende-se com a necessidade de valorizar o conhecimento próprio dos alunos, que estes desenvolvem fora da própria escola. Numa perspectiva particularmente interessante, Lampert (citada em Rubin, *et al.*, 1988, p. 12) propõe que o processo de instrução procure de forma deliberada formar e alargar as conexões entre quatro tipos de conhecimento:

- o conhecimento intuitivo, obtido de forma informal nas situações da vida de todos os dias;
- o conhecimento computacional, que especifica as regras para a manipulação de símbolos para chegar a uma resposta numérica;
- o conhecimento concreto, que depende de objectos particulares para o seu significado (exemplo, duas moedas de 25 tostões podem ser trocadas por 5 escudo); e finalmente,
- o conhecimento relacional, que inclui o conhecimento das relações e princípios (por exemplo, a propriedade comutativa) que formam a base da Matemática.

Diversos tipos de problemas da vida real. Existe uma grande variedade de problemas da vida real com que podemos lidar no ensino da Matemática. Uma forma de os classificar será em três grandes tipos, de acordo com a natureza das actividades que proporcionam, como se ilustra na *Figura 1* (Ames, 1980).

Os problemas de tipo 1 são situações do mundo real, relativamente curtas e auto-suficientes em termos de informação, que usualmente põem uma questão que tem uma solução simples (ou uma família finita de soluções). Em princípio, vários

Tipo	Escala de Tempo	Relevância Pedagógica	Foco
1	Vários problemas numa só aula	Ilustração duma aplicação ou exemplo importante	Matemática
2	Um problema de 1 a 5 aulas	Ilustração de como uma mesma situação pode ser estudada de mais de uma maneira	Situação/ Matemática
3	Uma actividade que se estende por várias semanas	Criação, invenção e descoberta	Processo de matematização e modelação

Figura 1 – *Diversos Tipos de Problemas de Aplicação Matemática e sua Relevância Pedagógica*

destes problemas podem ser tratados durante uma única aula. Estes problemas contêm normalmente informação suficiente (ou até em excesso) para permitir uma resolução matemática e podem ser usados quando o aluno já tem os conhecimentos necessários para os resolver.

Um problema de tipo 2 é uma situação do mundo real, normalmente susceptível de ser explorada de mais de uma maneira, que pode levar de uma a cinco aulas para estudar. A situação pode ser investigada em profundidade usando diversas técnicas matemáticas (por exemplo, gráficos, tabelas, equações, taxas, etc.). Segundo aquela autora, a resolução destes problemas tende a ser globalmente dirigida pelo professor, mas há normalmente oportunidades para explicações divergentes. O objectivo não é tanto ver a Matemática como instrumento para produzir respostas a questões específicas mas mais como um recurso para melhor compreender uma situação real.

Finalmente, problemas de tipo 3 são investigações abertas cuja exploração pode levar um tempo considerável e seguir um de muitos caminhos. Atendendo à sua natureza, podem representar actividades e experiências de aprendizagem muito diversas.

Estes problemas têm em princípio um forte atractivo pedagógico. Favorecem uma forte implicação dos estudantes, levando-os a uma postura muito mais participativa do que o usual. Eles podem assim envolver-se em actividades genuínas de investigação, descobrindo coisas em que o professor não tinha pensado, ganhando confiança nas suas próprias capacidades intelectuais. No seu

esforço específico de pensamento e conceptualização, acabam de forma natural por compreender conceitos e relações duma forma muito mais clara e profunda do que o que normalmente acontece quando a aprendizagem segue um percurso completamente dirigido.

Mas estes problemas têm também os seus inconvenientes. Por exemplo, numa actividade de investigação que se pretende venha a ter uma divulgação e impacto exterior à sala de aula, o planeamento necessariamente rudimentar pode originar situações imprevistas, que frequentemente acabam por invalidar os resultados obtidos. Há coisas que parecem simples numa fase inicial mas posteriormente se revelam impraticáveis. Os alunos podem querer redefinir a actividade duma forma profunda levando-a eventualmente por caminhos que pouco têm a ver com os objectivos da disciplina de Matemática. Finalmente, a logística associada à recolha de dados pode tornar-se pesada e consumidora de tempo, conduzindo a um cansaço generalizado, tanto dos alunos como dos professores (Rubin, *et al.*, 1988, p. 32).

No entanto, seja qual for o tipo de problema da vida real que se considere, a noção de modelo matemático assume sempre uma importância decisiva.

O PROCESSO DE MODELAÇÃO

A Matemática é aplicada às mais diversas áreas explícita ou implicitamente através da noção de modelo. Um *modelo matemático* constitui uma representação duma dada situação, objecto ou fenómeno através de objectos, relações e estruturas com que se descrevem os seus elementos que se consideram fundamentais, ao mesmo tempo que se ignoram deliberadamente os elementos tidos como secundários. Um modelo matemático pode ter diversas formas, mas na sua forma mais usual é constituído por variáveis, relações entre essas variáveis e as respectivas taxas de variação.

Nos problemas de tipo 3, ou seja, nas situações mais gerais de problemas da vida real, temos de considerar explicitamente o processo global de construção de um modelo. Nas situações do tipo 1 e 2, este processo surge normalmente de forma abreviada, ou porque o modelo já é relativamente conhecido dos alunos ou porque é apresentado pelo menos parcialmente elaborado pelo professor.

Vejamos resumidamente quais as fases essenciais do processo de construção e aperfeiçoamento de um modelo matemático (neste ponto seguindo de perto Kerr & Mali, 1979). Trata-se de um processo dinâmico que envolve vários passos.

Em primeiro lugar é preciso identificar o *problema ou situação do mundo real* que se pretende estudar. Depois do problema ter sido escolhido, ele tem

de ser modificado e simplificado de modo a poder ser descrito duma maneira razoavelmente precisa e sucinta. Nesta fase temos o que podemos chamar o *modelo real*. O problema é ainda formulado em termos do mundo real, mas já está simplificado de forma a que apenas os aspectos considerados mais relevantes aparecem incorporados na descrição.

De seguida, torna-se necessário traduzir as palavras e conceitos do mundo real por símbolos e expressões matemáticas, resultando num *modelo matemático*. Este consiste assim em objectos matemáticos (tais como conjuntos, números, figuras geométricas e funções) e expressões ou representações que relacionam estes objectos entre si (equações, gráficos, diagramas, transformações e tabelas).

Uma vez obtido o modelo matemático, num terceiro passo utilizamos técnicas e ferramentas matemáticas e lógicas (só por si, ou apoiadas em meios computacionais, em procedimentos experimentais, ou mesmo em recolha de dados no terreno) para chegar a *conclusões* baseados no modelo (Figura 2).

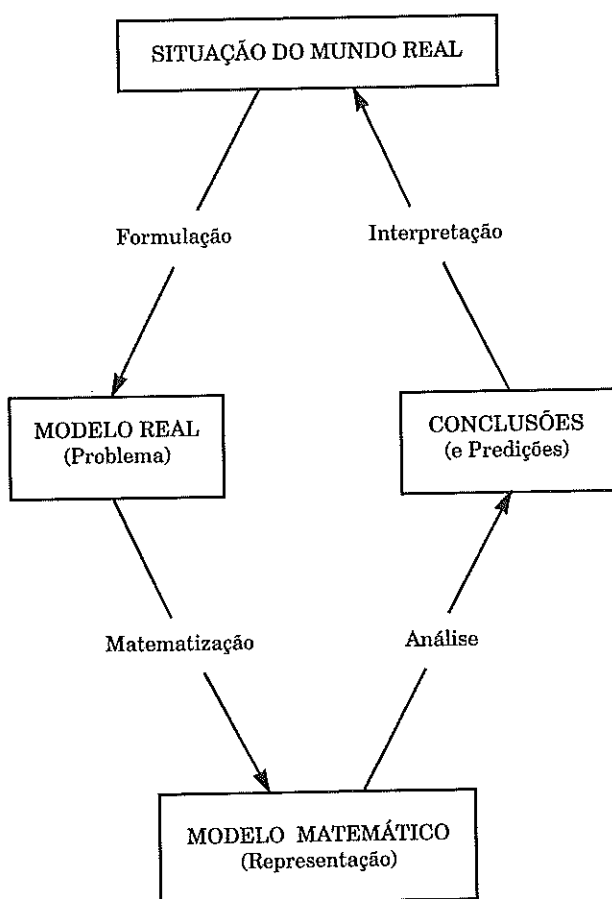


Figura 2 — O Processo de Modelação

Finalmente, estas conclusões são testadas e comparadas com o mundo real para avaliar o valor, insuficiências e possível utilidade do modelo.

Se o confronto revelar que o modelo não fornece a informação pretendida, ou é grosseiramente inadequado, então os diversos passos do processo têm de ser reconsiderados de forma a melhorá-lo e tirar novas conclusões. No processo de construção de um modelo matemático podem ser necessários vários ciclos sucessivos de aperfeiçoamento até se obter uma descrição satisfatória da situação.

Na prática este processo ideal nem sempre é seguido. Raramente se parte do zero. Além disso, diversas circunstâncias podem implicar que uma ou mais passagens possam ser combinadas ou omitidas. Por outro lado, quando o modelo matemático é utilizado como actividade de ensino, um outro passo é frequentemente adicionado ao processo de construção do modelo. Nele o modelo real é ainda mais simplificado e colocado duma forma que possa ser interessante e compreensível para os alunos, suscitando a utilização de certos conceitos matemáticos previstos pelo professor. Obtemos assim o que podemos designar por *modelo educativo*.

É de notar que existem outros modelos para além dos modelos matemáticos — nomeadamente os modelos físicos, à escala real ou mais frequentemente em escala reduzida, os modelos computacionais e os modelos descritivos verbais. Um modelo matemático pode naturalmente existir em interacção com modelos de outros tipos. A exploração de um modelo matemático pode também recorrer a elementos ou processos destes outros modelos.

É de notar igualmente que o termo modelo é por vezes usado em Matemática num sentido de certo modo diferente, nomeadamente na teoria dos modelos. Diz-se que uma estrutura matemática é um modelo duma dada teoria «abstracta» quando constitui uma «concretização» dessa teoria. Normalmente, a estrutura matemática que serve de modelo é mais familiar do que a teoria, embora tanto uma como outra sejam no fundo constituídas por objectos puramente matemáticos (Griffits & Howson, 1973, p. 292).

Construir modelos capazes de descrever situações complexas e com efectivo poder de previsão não constitui tarefa fácil. Nas aplicações avançadas a problemas científicos ou industriais, para além do domínio de ferramentas matemáticas diversas, é necessário um considerável nível de compreensão da disciplina na qual o problema surge (Spanier, 1981, p. 24).

As dificuldades associadas à tarefa não implicam no entanto que a escola se deva alhear dela. Pelo contrário, a sua importância em numerosas profissões e actividades e para uma cidadania informada e consciente, colocam-na como um objectivo incontornável. Assim, constitui um

importante objectivo educativo que os alunos desenvolvam as suas capacidades de:

- a) compreender e usar modelos já construídos ou semiconstruídos;
- b) construir modelos;
- c) explorar as implicações de modelos dados, ou por si construídos;
- d) avaliar modelos dados, ou por si construídos, reflectir sobre a sua utilização.

1.ª Fase – *Da Realidade ao Modelo Matemático*

A primeira fase do processo de construção do modelo diz genericamente respeito à passagem da situação da vida real ao modelo real, deste ao modelo educativo, e deste ao modelo matemático.

Duma maneira geral, constituem parte integrante desta fase do processo: a) identificar os elementos da situação que se pretende estudar; b) seleccionar os objectos, relações, etc., relevantes para este fim; c) idealizá-los de forma apropriada para uma representação matemática; d) escolher um universo matemático para servir de base ao modelo; e, e) efectuar uma translação da situação para este universo.

Dificuldades de natureza matemática e dificuldades com origem na situação. Por vezes, uma parte das dificuldades dos alunos em actividades de modelação têm origem em questões relacionadas com a compreensão da situação e não em questões de ordem matemática. Assim, uma boa compreensão da situação de referência é um requisito fundamental deste processo (aspecto salientado por exemplo, por Pollak, 1979). Não faz sentido tentar modelar uma coisa que não se compreende muito bem. No entanto, seria errado concluir daqui que os alunos têm primeiro que compreender a situação nos seus diversos aspectos e *nuances* e só depois encarar a construção do modelo. Os dois processos podem seguir a par e passo, alimentando-se mutuamente.

Aliás, esta visão é consistente com os resultados de investigação que apontam para uma evolução gradual das capacidades cognitivas, por exemplo no que respeita ao raciocínio proporcional. Assim, a competência nestes problemas é primeiro assumida pelos alunos para uma classe muito restrita de problemas e só a pouco e pouco é estendida sucessivamente a novas classes (Lesh e Kaput, 1988, p. 66).

O que é importante reter é que, se não houver o devido cuidado, as dificuldades associadas à compreensão da situação da vida real podem adicionar-se às dificuldades propriamente matemáticas do processo, contribuindo para criar um forte mal-estar entre os alunos. Além disso, esta necessidade de compreensão da situação de referência

existe não apenas nos processos gerais de modelação, mas mesmo nos problemas de tipo 2 e tipo 1, ou seja em todas as aplicações da Matemática.

A *construção de modelos como desenvolvimento conceptual local*. Lesh e Kaput (1988, p. 65-67) dão ênfase à ideia de que o desenvolvimento de modelos (e mais geralmente todo o processo de aprendizagem) constitui no essencial um desenvolvimento conceptual local. Ou seja, os alunos desenvolvem modelos essencialmente em ligação com situações concretas. Modelos relativos a certas situações podem ser francamente mais sofisticados do que modelos relativos a outras situações (o que constitui uma visão claramente distinta da de Piaget que postula a existência de operações mentais independentes de conteúdos concretos).

Frequentemente, os estudantes começam por usar sistemas fracamente coordenados, notando apenas os aspectos mais salientes das situações, não tendo em conta outros aspectos que também são importantes mas dão menos nas vistas, não notando discrepâncias entre o modelo e a realidade e postulando relações com base em interpretações subjectivas não raro injustificadas, baseadas em ideias *a priori* (Lesh, 1985b, p. 320-321).

Em alguns casos os alunos constroem modelos que se baseiam numa só ideia relativamente simples, noutros casos recorrem não apenas a uma mas a várias ideias importantes de Matemática e/ou das Ciências (Lesh e Kaput, 1988, p. 66).

Para que os alunos iniciem o processo de construção do modelo, eles precisam de ter à partida linhas de enquadramento conceptuais. Precisam de possuir um sistema organizacional ou relacional que ajude a identificar a informação matematicamente relevante (Lesh, 1985a, p. 81) e a natureza do modelo a desenvolver. É por isso de grande importância que os alunos disponham de «amplificadores conceptuais» (Vygotsky, 1978) como sistemas de representação, de linguagem e de símbolos, de preferência poderosos e económicos (Lesh, 1985a, p. 78). Estas considerações reforçam o argumento de que é preciso possuir uma base mínima de Matemática e igualmente um certo conhecimento da área em causa, para se poder ter sucesso no processo de modelação (conhecimento tanto mais necessário quanto mais complexas as situações).

Segundo Lesh (1985a), durante os estádios primitivos do processo de construção de um modelo, verifica-se que os alunos operam em simultâneo com conceptualizações meio formuladas, muitas vezes logicamente incompatíveis, cada uma das quais sugerindo os seus próprios procedimentos. Este autor refere que, numa única sessão de trabalho, é frequente que um aluno realize, através das diversas formulações do seu modelo, um percurso que corresponde a diversos estádios de desenvolvimento cognitivo e que muitas vezes são vistos como necessitando de diversos anos para percorrer. Sendo assim, a noção de nível de desen-

volvimento não deveria ser vista como algo muito difícil de transpor, nem como algo obedecendo a um ritmo lento e basicamente independente das interferências exteriores, mas antes como algo susceptível de evoluções sensíveis, desde que proporcionadas as actividades apropriadas, na óptica das ideias de «zona de desenvolvimento próximo» de Vygotsky.

2.ª Fase – O processamento e Análise de Dados e de Relações

Nesta segunda fase trata-se de: a) estabelecer relações matemáticas entre os objectos traduzidos, acompanhados por hipóteses e propriedades; e b) usar métodos matemáticos (cálculo, dedução, etc.), apoiados eventualmente noutros métodos computacionais e experimentais, para obter novos resultados e conclusões relativos ao modelo.

O trabalho nesta fase deve ter em conta vários aspectos (que poderíamos designar por *princípios didácticos*).

Assim, os procedimentos matemáticos a realizar não devem ser executados ignorando a situação e o modelo, mas tendo em conta a experiência, o conhecimento e as intuições dos alunos a seu respeito. Como dizem Griffiths e Howson (1973, p. 292), mesmo nesta fase devemos ter a situação bem presente para não nos deixarmos perder pelas manipulações puramente matemáticas.

As ideias matemáticas desenvolvem-se. Não se resumem aos estádios de existir ou não existir (0 ou 1, na terminologia de Lesh, 1985a, p. 75). As situações da vida real, convenientemente escolhidas e apresentadas, podem ser de grande importância no desenvolvimento dos conceitos e ideias matemáticas.

Finalmente, será de esperar que os processos de modelação contribuam tanto para o desenvolvimento da compreensão do *significado* das ideias matemáticas básicas como da capacidade de as *usar* de forma efectiva (Lesh, 1985a, p. 75).

3.ª Fase – Interpretação, Exploração e Avaliação do Modelo

Nesta fase trata-se de: a) interpretar os resultados e conclusões obtidos no quadro da situação original; b) avaliar o modelo confrontando-o com a realidade (com dados observados ou previstos), comparando-o com outros modelos e/ou relacionando-o com conhecimentos teóricos; c) explorar possíveis implicações do modelo em termos da situação, ajudando a descobrir eventualmente novas facetas desta; d) estudar as implicações do uso do modelo e delimitar a sua significância; e e) construir, se necessário um modelo novo ou modificado.

Um modelo, uma vez construído e validado, pode ser usado com o objectivo de conseguir ter

uma visão mais profunda do fenómeno em causa. O modelo pode apontar para novas relações, novas propriedades, novos aspectos da situação, indicando-nos em que direcção devemos procurar mais dados.

Os modelos podem também ser usados como base para tomar decisões. Neste caso é particularmente importante conhecer bem as hipóteses e pressuposições em que se baseia o modelo, de forma a que os riscos decorrentes da sua utilização sejam devidamente avaliados.

Skovsmose (1988, p. 25) defende que existem três tipos de conhecimento relativamente ao processo de modelação: o conhecimento matemático propriamente dito, o conhecimento tecnológico, ou seja, conhecimento de como construir um modelo matemático e como aplicar a Matemática, e o conhecimento reflexivo, isto é, o conhecimento conceptual mais geral, ou meta-conhecimento acerca da natureza dos modelos matemáticos e dos critérios utilizados na sua construção, aplicação e avaliação. No seu entender, o conhecimento reflexivo não pode ser reduzido ao conhecimento tecnológico, da mesma maneira que o conhecimento tecnológico não pode ser reduzido ao conhecimento matemático.

Embora todos os tipos de conhecimento sejam relevantes para as diversas fases do processo de modelação, podemos dizer, usando esta terminologia, que o conhecimento matemático é especialmente relevante na segunda fase, o conhecimento tecnológico é fundamental na primeira e terceira fases, e o conhecimento reflexivo é particularmente importante na parte final da terceira fase. Numa linha de pensamento semelhante, Davis (1988) defende também que, no ensino da Matemática, se deve dar uma grande atenção à análise crítica do uso dos diferentes modelos com os quais se procura muitas vezes justificar decisões de grande importância social.

Skovsmose (1988, p. 28-30) defende ainda que existem vários factores que interferem nas relações entre o objecto e o modelo. Indica nomeadamente:

- relações modelo-teoria: um modelo pode ser baseado numa teoria única, caso em que se «deduz» da teoria, pode ser baseado numa única teoria escolhida de entre várias, pode ter por base uma combinação de teorias distintas (eventualmente até contraditórias), ou até não se basear em nenhuma teoria;
- relações modelo-objecto: uma vez que a correspondência entre a realidade e o modelo não é de isomorfismo, e portanto há sempre aspectos de selecção que podem ser mais ou menos discutíveis (que elementos da realidade são importantes? A que relações entre si é dada maior atenção?);
- relações objecto-sistemas conceptual; considerando aspecto como: que pressuposições

tornaram possível criar o sistema? Como podem elas ser corroboradas? Que quadros teóricos as tendem a suportar? Que quadros teóricos alternativos existem?;

- d) relações sistema conceptual-modelo: que se baseiam parcialmente no nosso conhecimento da área em causa e parcialmente no nosso conhecimento matemático do que poderão ser propriedades desejáveis;
- e) relações modelo-interesse (que pode ser instrumental, interpretativo ou interventivo), um modelo pode ser utilizado com propósitos de descoberta ou de justificação.

O Processo Global de Construção do Modelo

Estratégias e processos: a natureza instável das conceptualizações. Lesh conduziu diversas investigações em que usou problemas que pretendem ser típicos de situações da vida real, bastante imaginativos e com um cunho profundamente realista. Neles, no entanto apenas se requer ideias facilmente identificáveis de aritmética e geometria intuitiva, incluindo medição.

Este autor (Lesh, 1982, p. 183), sublinha o facto de que na resolução de problemas matemáticos aplicados o grupo (ou o indivíduo) tende a alternar entre várias interpretações ou modelos distintos da situação (incluindo a consideração dos seus objectivos e dados), com diferentes conceptualizações ocorrendo com vários graus de refinamento e sofisticação, sendo os modelos iniciais bastantes instáveis.

Sintetizando resultados de investigação (Lesh, 1982, p. 185), indica que em alguns casos uma conceptualização primitiva dava origem a um processo de cálculo, o qual, pela sua própria lógica dava origem a uma nova conceptualização, aparentemente sem que os estudantes disso se apercebessem muito bem. Algumas vezes «este tipo de mutação levou à criação de ideias produtivas e interpretações correctas; noutros casos ao desaparecimento de perspectivas promotoras de soluções».

Há duas estratégias fundamentais a que os alunos podem recorrer: a) modificar uma única ideia poderosa, adaptando-a às necessidades dos problemas, ou b) tentar conjugar várias ideias e processos simples. Em qualquer dos casos trata-se de um processo de construção necessário para enquadrar a situação dada, e os alunos não estão habituados a este tipo de trabalho, que não é usual em Matemática — onde em princípio há sempre um método ou estratégia bem definida para resolver um problema, qualquer que ele seja (Lesh, 1982, p. 187).

A ideia fundamental é que os alunos constroem soluções por justaposição gradual, integração e diferenciação de estruturas conceptuais instáveis. O ensino, neste caso, tem de ter em vista ajudá-los

a organizar e usar ideias que eles já têm (Lesh, 1985b, p. 319-320).

De facto, a informação manipulada na resolução de problemas matemáticos aplicados não é constituída por dados de base, mas sim por sistemas organizacionais e relacionais (Lesh, 1985b, p. 322), sendo por isso de natureza extremamente complexa.

Esta caracterização dos processos usados pelos alunos leva Lesh (1985b, p. 325) a dar a seguinte definição de problema (matemático aplicado): trata-se de uma situação para a qual não existe um modelo conceptual estável para a resolver. Os problemas não podem ser resolvidos simplesmente ligando modelos estáveis em conjunto. Especialistas num dado domínio de conteúdo são aqueles que têm modelos conceptuais acessíveis e estáveis para interpretar e manipular a informação num dado domínio.

As heurísticas mais importantes quando se lida com sistemas conceptuais instáveis são por exemplo: como detectar as deficiências dos modelos, como minimizar as influências debilitantes dos modelos conceptuais instáveis, como construir modelos sucessivamente mais complexos e mais refinados, como interpretações diversas são diferenciadas, reconciliadas ou integradas (Lesh, 1985b, p. 323).

Os processos identificados por Lesh e Akerstrom (1982, p. 128) em problemas de Matemática aplicados incluem:

- a) o uso de vários sistemas de representações e traduções de uns sistemas para os outros;
- b) a introdução de notação relevante;
- c) a simplificação da situação para se adequar aos nossos modelos pré-existentes;
- d) o refinamento dos nossos próprios modelos para reflectir adequadamente a realidade numa situação;
- e) a investigação da qualidade ou a utilidade de predições baseadas em modelos.

Segundo estes autores, todos estes processos contribuem para a criação de sentido bem como para tornar mais usáveis as ideias matemáticas.

Nos problemas que propuseram, os alunos tendem a trabalhar para a frente, começando com uma compreensão qualitativa da situação e gradualmente evoluem para um compreensão mais quantitativa, em que dados específicos são substituídos por equações computacionais.

A formulação e testagem de hipóteses como no processo de resolução de problemas de Matemática aplicados. Segundo Frederiksen (1984), quando os problemas são de natureza não estruturada é necessário usar «processos lentos» (exigindo grande atenção, revisão frequente do conhecimento proposicional e procura na memória de longo prazo de informação e ideias relevantes), recorrendo à

intervenção de competências estratégicas (compreensão do processo de modelação) e metacognitivas relevantes e já previamente adquiridas.

Parece por isso razoável admitir que no processo de construção e aperfeiçoamento de modelos o método fundamental envolverá uma contínua geração e testagem de hipóteses (qual a natureza do modelo? Que variáveis são fundamentais? Que tipos de relações poderemos estabelecer entre elas?).

A formulação de hipóteses ocorre cedo no processo. As hipóteses podem ser sugeridas por itens contidos na informação dada, podem derivar de informação conhecida da pessoa ou de inferências realizadas conjugando os dois aspectos. O número de hipóteses considerado em cada momento será tipicamente pequeno. Uma dada hipótese pode ser tentativamente escolhida para ser testada. É preciso ver que informação adicional será necessária. São então dados os passos necessários para obter essa informação (procurando na memória de longo termo, perguntando, consultando fontes externas, conduzindo procedimentos lógicos, matemáticos, experimentais ou computacionais). Finalmente, a hipótese é avaliada em vista dos resultados e rejeitada, modificada ou mantida.

Vários ciclos deste processo podem ser conduzidos nos quais novas hipóteses vão sendo estabelecidas e várias formas de as testar vão sendo concebidas, podendo-se procurar tanto evidência confirmatória como desconfirmatória.

Estes processos são lentos e laboriosos e na ausência de consistências no conjunto de problemas não há possibilidade de criar «automatizações». Mas se houver regularidades, uma capacidade de as reconhecer pode ser desenvolvida e tornar o raciocínio mais expedito (Frederiksen, 1984, p. 392).

Iterações do processo de modelação. Lesh (1985a, p. 89-90) refere sessões nas quais os alunos percorreram até cerca de dez 'ciclos de modelação' durante uma sessão de 40 minutos. As diferenças entre os tipos de modelos, ou entre diferentes formas de um mesmo tipo de modelo, derivam do facto de que são seleccionados ou considerados dados diferentes, são impostos diferentes tipos de sistemas relacionais ou organizacionais nos dados, ou são utilizados meios diferentes de simplificar, combinar e sintetizar os dados.

No entanto, mais usual é que os alunos percorram dois a quatro modelos numa situação. Os alunos movem-se numa conceptualização para outra através de um processo em três etapas. Primeiro encarando uma certa relação no quadro de uma dada conceptualização. Depois deixando a atenção fugir da conceptualização global e fixando-se na relação. Finalmente, começando a tratar a relação como parte de uma nova conceptualização (Lesh, 1985b, p. 321).

Esta facilidade em percorrer diversos ciclos de modelação contrasta fortemente com o que foi

observado noutras situações, nomeadamente quando é marcante o processo de recolha de dados. Neste caso os estudantes (e professores) revelam dificuldade em iterar através das descrições matemáticas e da consideração da situação da vida real e tendem a permanecer no terreno da realidade, uma vez regressados a ele. Um desafio será facilitar o processo iterativo e dar aos alunos um modelo global do processo de análise que inclui afirmações que derivam de ambos os domínios do conhecimento (Rubin, *et al.*, 1988, p. 58).

Alunos bem e mal sucedidos em problemas matemáticos aplicados. Segundo Lesh (1982, p. 185-6; 1985b, p. 322), os alunos mais bem sucedidos passam comparativamente mais tempo que os alunos mais mal sucedidos a pensar nos dados e nos objectivos do problema e em questões de natureza conceptual e muito menos nas estratégias e nos aspectos de natureza procedimental.

Por outro lado, alunos mais bem sucedidos na resolução de problemas matemáticos aplicados tendem a usar processos mais fortes, dependentes dos conteúdos, em vez de processos mais gerais e por isso mesmo menos potentes (Lesh, 1985b, p. 324).

Aparentemente, da mesma maneira do que para os problemas puramente matemáticos (Kruteskii, 1976), nos problemas aplicados os alunos com facilidade nesta disciplina vêem conexões entre situações ou ideias que os estudantes médios não reconhecem. E, da mesma forma, alunos com sérias dificuldades em Matemática não reconhecem conexões que parecem evidentes a alunos médios (Lesh, 1985b, p. 325).

O possível papel do computador. O computador é um acrescento importante ao processo de modelação. Ele permite criar um modelo externo, concreto, manipulável. Pode permitir representações múltiplas da situação dada. A interacção entre este modelo externo e o modelo mental interno da própria pessoa pode intensificar-se, ajudando de forma fundamental ao desenvolvimento do processo de modelação (Webb e Hassel, 1988).

O computador pode assim desempenhar o papel de um amplificador conceptual, reduzindo o dispêndio de energia no pensamento de primeira ordem, e tornando possível mais pensamento de segunda ordem (Lesh, 1985a, p. 79).

Entre os programas que podem ser úteis no processo de construção de modelos, contam-se os programas para ajustamento de curvas, traçadores de gráficos de funções, folhas de cálculo, programas de gráficos, programas de modelação e manipuladores simbólicos (Fey, 1988).

CONCLUSÃO

Se relativamente aos problemas de Matemática pouco se sabe ainda de seguro relativamente à sua

Didáctica, ainda mais precário é o nosso conhecimento acerca da resolução de problemas da vida real. Para estes, como problemas genuinamente não estruturados, é ainda mais difícil de encontrar uma base apropriada de conhecimentos, a não ser no sentido de desenvolver uma experiência alargada e uma boa educação geral.

Deste modo, uma conclusão dum artigo como este não pode deixar de ser essencialmente um enunciado de questões em aberto susceptíveis de investigação. Agruparei estas questões em quatro temas: *a)* a natureza dos modelos matemáticos; *b)* os processos cognitivos dos alunos; *c)* as decisões curriculares, e, *d)* o processo de ensino-aprendizagem e o papel do professor.

A natureza dos modelos matemáticos. Existem modelos com características bastante diversas. No entanto, praticamente não existe uma literatura que organize o assunto. Os sistemas dinâmicos, que constituem o tipo sem dúvida mais divulgado, têm propriedades extremamente interessantes, que os tornam muito relevantes do ponto de vista pedagógico. Mas isso não é razão para ignorar a possível importância de outros modelos. É precisa portanto uma melhor taxonomia de modelos, tendo em conta a sua natureza, que dê um panorama mais completo e permita uma mais informada escolha de opções curriculares.

Os processos cognitivos. A teorização produzida por Lesh proporciona algumas perspectivas interessantes acerca dos processos cognitivos dos alunos. Trata-se, no entanto, de uma formulação obviamente ainda insuficiente. A teoria poderá desenvolver-se como um prolongamento destas perspectivas ou seguir outras direcções.

Segundo este autor, as questões teóricas que se colocam são: *a)* identificar a natureza dos modelos conceptuais primitivos dos alunos para diversas ideias matemáticas; *b)* explicar como é que as deficiências nos vários modelos são detectadas; *c)* explicar como é que modelos mais bem sucedidos são gradualmente construídos; e *d)* descrever características cognitivas associadas ao uso de modelos conceptuais instáveis e como é que podem ser minimizadas as suas influências contraproductivas (Lesh, 1982, p. 183).

Em relação à primeira questão este investigador tem uma resposta incisiva: os modelos primitivos dos alunos são estruturas conceptuais instáveis. Poderá ser um ponto de partida, mas é preciso saber mais acerca dessas estruturas: como se formam, como funcionam, como se tornam estáveis?

Nas segunda e terceira questões a sua resposta é mais vaga. Ele sugere que em alguns casos as deficiências são detectadas, noutros demora mais tempo, que o processo de construção segue por vezes vias pouco lógicas, etc., mas pouco adianta acerca dos mecanismos concretos que estão em operação.

E finalmente, no que respeita à intervenção que pode ser realizada com vista à ultrapassagem de dificuldades, embora sejam sugeridos alguns princípios, muito fica também em aberto.

Convém não esquecer igualmente que Lesh estudou problemas de um tipo extremamente interessante, com um carácter profundamente realista, mas nem por isso muito sofisticados do ponto de vista matemático. É uma questão também em aberto saber se para problemas de outros tipos as suas observações e perspectivas terão semelhante pertinência.

Podemos ainda colocar outras questões relativamente à natureza dos processos cognitivos:

- os processos envolvidos nos nossos problemas de tipo 1, 2 e 3 serão provavelmente bastante diferentes (caso contrário não valeria a pena distinguir entre as três situações!); quais as diferenças mais significativas?
- quais as heurísticas (relativas ao processo global, relativas a cada uma das fases) que podem assistir no processo de resolução de problemas de Matemática aplicados?
- qual o papel dos conhecimentos e competência básicas em cada uma das fases do processo?

As decisões em matéria de escolha curricular. A introdução dos problemas de Matemática aplicados e de actividades de modelação pressupõem uma clara explicitação de objectivos e estratégias e uma articulação com os restantes conteúdos, objectivos e actividades curriculares. Atendendo a que se trata de uma vertente nova a introduzir no processo de ensino-aprendizagem torna-se necessário estudar com cuidado os respectivos problemas de implementação. Neste âmbito, questões mais específicas a estudar serão, por exemplo:

- como articular o uso das situações da vida real como ponto de partida para a aprendizagem de conceitos (e outros conteúdos) e como situações problemáticas que importa estudar a fundo?
- qual o papel didáctico dos problemas de tipo 1, tipo 2, e tipo 3? Quando é que cada um deve ser usado? Em que condições?
- podemos estabelecer diferentes tipos de situações da vida real, com base na diferente natureza dos modelos, com diferentes papéis pedagógicos?
- quais as precauções a ter, de forma a não cair na armadilha das utilizações ridículas de pseudo-modelos matemáticos a propósito e a despropósito, no estido justamente verberado por Freudenthal (1979)?

O processo de ensino-aprendizagem e o papel do professor. No que respeita à concretização do

processo de ensino-aprendizagem colocam-se questões como:

- como pode o trabalho dos alunos ser apoiado pelo professor? Que «princípios» pedagógicos há a respeitar?
- como ajudar os alunos a tornar-se mais competentes na resolução de problemas de Matemática aplicados?

Estes quatro grandes grupos de questões estão profundamente interligados, não existindo propriamente uma hierarquia entre eles. Eles terão de ser abordados necessariamente em simultâneo, através de análises teóricas e de investigações empíricas.

BIBLIOGRAFIA

- Ames, P. (1980) – A Classroom Teacher Looks at Applications, in D. Bushaw, M. Bell, H. Pollak, M. Thompson, & Z. Usiskin (eds.), *A Sourcebook of Applications of School Mathematics* Reston, NCTM.
- Ansell, B. (1988) – Modelling Sunrise Data with a Function Graph Plotter, in D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers, and Children*, Milton Keynes, Open University.
- APM (1988) – *Renovação do Currículo de Matemática*, Lisboa, APM.
- Boudon, R. (1970/1973) – *Modelos e Métodos Matemáticos*, (tradução do original em francês de Carlos Marques de Figueiredo), Lisboa, Livraria Bertrand.
- Burghues, D., Huntley, I., McDonald, J. (1988) – *Applying Mathematics: A Course in Mathematical Modelling*, Chichester, Ellis Horwood.
- Charles, R. I. (1982) – An Instructional System for Mathematical Problem Solving, in S. Rachlin (ed.), *Problem Solving in the Mathematics Classroom* (Math Monograph, n.º 7), Alberta, MCATA.
- Cockcroft, W. H. (1982) – *Mathematics Counts*, London, Her Majesty's Stationery Office.
- D'Ambrósio, U. (1986) – *Da Realidade à Acção*, São Paulo, Summus Editorial.
- Davis, P. J. (1988) – Applied Mathematics as Social Contract, *ZDM*.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1980) – *The Mathematical Experience*, Boston, Birkhauser.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1986) – *Descartes' Dream: The World According to Mathematics*, Boston, Houghton Mifflin.
- Dewey, J. (1910) – *Wow We Think*, Boston, Heath.
- Duarte, A. L., Silva, J. C., e Queiró, J. F. (1981) – Porque não Olimpíadas Matemáticas em Portugal?, *Inflexão*, n.º 2, 23-28.
- Fernandes, D. (1989) – Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas em Matemática, *Educação e matemática*, n.º 8, 3-6.
- Ferrari, P. L. (1989) – Hypothetical Reasoning in the Resolution of Applied Mathematical Problems at the Age of 8-10, *Proceedings of PME*, 13, Paris.
- Frederiksen, N. (1984) – Implications of Cognitive Theory for Instruction in Problem Solving, *Review of Educational Research*, Vol. 54, 363-407.
- Freudenthal, H. (1978) – *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*, Dordrecht, Reidel.
- Griffiths, H. B., & Howson, A. G. (1973) – *Mathematics: Society and Curricula*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Hamilton, E., & Landau, M. (1982) – Applied Mathematical Problem Solving: Results from One Problem for Seventh-Graders, *Proceedings of PME-NA*, 4, Athens, Georgia.
- Hancock, C. & Kaput, J. (1990) – Computerized Tools and the Process of Data Modeling, *Proceedings of PME*, 14, Mexico.
- Heid, M. K. (1990) – Uses of Technology in Prealgebra and Beginning Algebra, *Mathematics Teacher*, Vol. 77, 194-198.
- Johnson-Laird, P. N. (1983) – *Mental Models*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kaput, J. J., & Hancock, C. (1991) – Translating Cognitively Well – Organized Information Into a Data Structure, *PME*, 15.
- Kantowsky, M. G. (1977) – Processes Involved in Mathematical Problem Solving, *Journal for Research in Mathematical Education*, Vol. 8, 163-180.
- Kerr, D. R., & Maki, D. (1979) – Mathematical Models to Provide Applications in the Classroom, in S. Sharron (ed.), *Applications in School Mathematics*, Reston, NCTM.
- Lesh, R. (1982) – Modeling Students' Modeling Behaviors, *Proceedings of PME-NA*, 4, Athens, Georgia.
- Lesh, R. (1985a) – Conceptual Analyses of Mathematical Ideas and Problem Solving Processes, *Proceedings of PME*, 9, Holanda.
- Lesh, R. (1985b) – Conceptual Analyses of Problem Solving Performance, in E. A. Silver (ed.), *Teaching and Learning Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R. (1990) – Computer-Based Assessment of Higher Order Understandings and Processes in Elementary Mathematics, in G. Kulm (ed.), *Assessment of Higher Order Thinking in Mathematics*, Washington, DC, AAAS.
- Lesh, R., & Akerstrom, M. (1982) – Applied Problem Solving: Priorities for Mathematics Education Research, in F. Lester & J. Garofalo (eds.), *Mathematical Problem Solving: Issues in Research*, Philadelphia, Franklin Institute Press.
- Lester, F. (1980a) – Research on Mathematical Problem Solving, in R. J. Shumway (ed.), *Research in Mathematics Education*, Reston, NCTM.
- Lester, F. (1980b) – Problem Solving: Is it a Problem?, in M. M. Lindquist (ed.), *Selected Issues in Mathematics Education*, Reston, NCTM.
- Mandinach, E., & Cline, H. F., (1989) – Applications of Simulation and Modelling in Precollege Instruction, *Machine-Mediated Learning*, Vol. 3, p. 189-205.
- NCSM (1976) – Position Statement on Basic Skills, *Mathematics Teacher*, Vol. 73, 147-152.
- NCTM (1980) – *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*, Reston, NCTM.
- Pereira, D. C. (1989) – Modelos como Representações Privilegiadas nas Estratégias de Confrontação para a Aprendizagem da Ciência, *Actas do Simpósio sobre Significação e Conhecimento*, Lisboa.
- Ponte, J. P., e Abrantes, P. (1982) – Os Problemas no Ensino da Matemática, *Actas do Colóquio "O Ensino da Matemática nos Anos 80"*, Lisboa, Sociedade Portuguesa de Matemática, 201-213.
- Pollak, H. O. (1979) – L'Interaction des Mathématiques et des Autres Matières Scolaires, *Tendances Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques*, Vol. IV, Paris, UNESCO.
- Polya, G. (1945) – *How to Solve It*, Princeton, Princeton University Press.
- Pratt, Dave (1988) – Computer Modelling in a Problem-Solving Environment, in D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, Milton Keynes, Open University.
- Rubin, A., Rosebery, A. S., & Bruce, B. (1988) – *ELASTIC and Reasoning Under Uncertainty*, (Report n.º 6851), Boston, BBN Systems and Technologies Corporation.
- Schoenfeld, A. (1980) – Heuristics in the Classroom, in R. E. Reys (ed.), *Problem Solving in School Mathematics*, Reston, NCTM.
- Silva, J. S. (1975) – *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática* (edição original policopiada de 1964), Lisboa, GEP.
- Simon, H. (1969) – *As Ciências do Artificial*, Lisboa, Arménio Amado.
- Skovsmose, O. (1988) – Mathematics as Part of Technology, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 19, 23-41.
- Spanier, J. (1981) – Solving Equations is not Solving Problems, in L. A. Steen (ed.), *Mathematics Tomorrow*, New York, Springer-Verlag.
- Swetz, F. (1989) – When and How Can We use Modelling?, *Mathematics Teacher*, Vol. 82, 722-726.
- Thompson, M. (1981) – Mathematization in the Sciences, in L. A. Steen (ed.), *Mathematics Tomorrow*, New York, Springer-Verlag.
- Treffers, A., & Goffree, F. (1985) – Rational Analysis of Realistic Mathematics Education – The Wiskobas Program, *Proceedings of PME*, 9, Holanda.
- Wickelgren, W. A. (1974) – *How to Solve Problems*, San Francisco, Freeman.

RESUMO

Neste trabalho considera-se o papel da Resolução de Problemas no ensino da Matemática, apontando as origens desta actividade, referindo possíveis perspectivas de integração curricular e discutindo uma questão profundamente negligenciada na literatura portuguesa – as estratégias de ensino para ajudar os alunos a desenvolver as suas competências neste domínio. Analisa-se igualmente o papel educativo dos problemas da vida real e considera-se em particular o processo de modelação. Descrevem-se em pormenor as suas etapas e dá-se especial realce à natureza das competências cognitivas necessárias, terminando-se com uma agenda de questões para futura investigação.

RÉSUMÉ

Ce travail address le rôle de la résolution des problèmes dans l'enseignement des mathématiques. On discute les origines de cet activité, et bien aussi diverses perspectives d'intégration au curriculum. On aborde une question profondement negligencié dans la littérature portugaise à ce sujet – les stratégies d'enseignement pour aider les élèves à développer ses competences dans ce domain. Le rôle educatif des problèmes de la vie est considéré, traitant avec particulier attention le processus de modélisation. Ses étapes sont envisagées en détail et une attention speciale est donné à la nature des activités cognitives nécessaires. On fini avec une agenda de questions pour recherche future.

ABSTRACT

This paper focuses on the role of problem solving in mathematics education. Its historical origins and possible perspectives of curricular integration are discussed, as well as another question rarely touched upon in Portuguese literature – teaching strategies to help students to overcome their competency in this domain. The paper also considers the educational role of real life problems and specially the modelling process. Its main stages are described in detail and special attention is focused in the cognitive competencies important to deal with them. It concludes with an agenda of issues for future investigations.