

TEOREMA DE BAYES, QUANTIFICAÇÃO DA CONFIRMAÇÃO DE UMA HIPÓTESE PELA EVIDÊNCIA E ACTUALIZAÇÃO DE CRENÇAS

“Definimos a arte da conjectura, ou arte estocástica, como a arte de avaliar tão exactamente quanto possível as probabilidades das coisas, de tal modo que nos nossos juízos e acções possamos sempre basear-nos no que se achou ser o melhor, o mais apropriado, o mais certo, o mais avisado; este é o único objecto da sabedoria do filósofo e da prudência do homem de Estado.”

J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*

Preâmbulo

No decurso dos últimos trinta anos, Rudolf Haller defendeu de forma sustentada em vários dos seus escritos um conjunto de teses histórico-filosóficas de grande importância que, a pouco e pouco, se foram impondo entre os investigadores de História da Filosofia do Século XX. Estas teses, hoje em dia já praticamente parte do saber estabelecido, são as seguintes.

Primeira, a de que, a partir do início do último quartel do século XIX, se desenvolveu, na zona do Império Austro-Húngaro, uma filosofia portadora de características identitárias próprias, que claramente a distinguem das restantes escolas filosóficas de língua alemã.

Segunda, a de que o momento “fundador” dessa filosofia foi o ano de 1874, data em que, por um lado, foi publicado o livro *Psychologie vom empirischen Standpunkt*, de Franz Brentano, e em que, por outro lado, o próprio Brentano foi chamado a ocupar uma cátedra na Universidade de Viena.

Terceira, a de que as linhas de força da metodologia filosófica instituída e institucionalizada na Academia vienense por Brentano se caracterizaram, sobretudo, por uma oposição ao transcendentalismo e ao idealismo dominantes na filosofia alemã de origem kantiana e pela afirmação da existência de uma unidade essencial entre as ciências da natureza e as ciências humanas, a qual se fundamentaria na validade universal do método empírico usado pelas ciências naturais. A este respeito deve aqui lembrar-se que Brentano foi o autor da célebre frase: “*Vera philosophiae methodus nulla alia nisi scientiae naturalis est*” (“O verdadeiro método da Filosofia não é outro

senão o das ciências naturais”), a qual constava, como uma das suas teses mais importantes, do seu *Habilitationsschrift*, defendido na Universidade de Viena em 1866.

Quarta, a de que o desenvolvimento desta tradição se aprofundou num diálogo sistemático e constante com a tradição filosófica do empirismo britânico e não com a tradição do idealismo transcendental dominante na Alemanha. Desse diálogo, em que os interlocutores dos filósofos do Império dos Habsburgos foram, sobretudo, Locke, Hume e Stuart Mill, resultaram uma consciência extremamente aguda da necessidade de investigar a linguagem e um interesse genuíno pelo cultivo da Lógica e pelo seu aprofundamento; tanto uma como o outro encontram-se conspicuamente ausentes na filosofia idealista alemã.

Quinta, a de que dois dos movimentos filosóficos que mais importância e influência tiveram na História da Filosofia da segunda metade do século XX, ou seja, o do Círculo de Viena e a filosofia de Wittgenstein, descendem em linha directa desta tradição e devem ser compreendidos à sua luz.

A tradição filosófica identificada por Haller teve uma vida curta no espaço geográfico e cultural que lhe deu vida. Com efeito, pouco mais de sessenta anos após o seu “nascimento oficial”, a ocupação nazi da Europa Central aniquilou-a de um modo brutal. Mas a diáspora, a partir de meados dos anos 30, de alguns dos seus mais prestigiados representantes para o Reino Unido e os Estados Unidos da América permitiu que muitas das ideias originais que emergiram nos círculos de discussão intelectual e filosófica de Viena, Praga ou Varsóvia tivessem ganho uma audiência planetária. Muito provavelmente, sem essa diáspora, nunca o trabalho de autores como Gödel, Tarski, Wittgenstein ou Popper teria tido a projecção que teve.

O último dos grandes filósofos de origem vienense foi, indubitavelmente, Karl Popper. Como é sabido, Popper distinguiu-se pelo seu trabalho em Epistemologia e Filosofia da Ciência, as disciplinas que considerava como as mais importantes do currículo filosófico. Coerente com esta opinião, ele escreveu em *Logik der Forschung*: “o problema principal da Filosofia é a análise crítica do apelo à autoridade da ‘experiência’”¹.

No pequeno ensaio que se segue, apresento, de forma sintética e recorrendo a exemplos simples, algumas das ideias mestras de uma certa perspectiva hodierna de abordar o problema que Popper considerou ser “o problema principal da Filosofia”. Embora de elaboração recente, desenvolvido sobretudo no meio filosófico anglo-saxónico, e divergindo de Popper em aspectos essenciais, o método para procurar alcançar uma compreensão dos fundamentos do método científico e da Epistemologia de que a seguir dou conta não deixa, todavia, de encaixar bastante bem nos preceitos metodológicos gerais apresentados por Brentano, cultivados por Ernst Mach e pelos filósofos do Círculo de Viena e salientados por Haller.

Entre nós, a tradição filosófica originalmente austríaca, tal como ela foi identificada e clarificada por Haller, foi especialmente cultivada e divulgada por M.S. Lourenço. Creio, por isso, ter todo o cabimento incluir este ensaio neste volume de homenagem à sua pessoa e à sua carreira académica na Universidade de Lisboa.

¹ Cf. Popper 1959, pp.51-52

1. Teorema de Bayes e Teoria da Confirmação

Na edição de 1764 das *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* foi publicado postumamente um artigo intitulado “Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances”, da autoria de Thomas Bayes (1702-1761), um clérigo presbiteriano inglês pouco conhecido que também se dedicou ao estudo da Matemática. Neste artigo, aparece demonstrado pela primeira vez o seguinte teorema do Cálculo das Probabilidades:

$$p(A/B) = \frac{p(A) \cdot p(B / A)}{p(B)}$$

Este teorema, por vezes chamado “Teorema da Probabilidade Inversa”, permite-nos calcular uma probabilidade condicional, dada a probabilidade condicional contrária e as probabilidades categóricas. Apesar de, de um ponto de vista estritamente matemático, este ser um teorema relativamente trivial, ele é especialmente importante na moderna Teoria da Confirmação. Esta, por sua vez, começou a ser sistematicamente desenvolvida apenas a partir dos anos cinquenta do século XX, embora se possa considerar que os ensaios que a fundam foram publicados, independentemente um do outro, por Ramsey, em Cambridge, e De Finetti, em Roma, cerca de trinta anos antes. Dada a importância acima referida, o Teorema da Probabilidade Inversa veio a receber o nome do seu descobridor. Passou assim a ser conhecido como o *Teorema de Bayes*. Normalmente, este teorema é apresentado na Teoria da Confirmação (TC) com a seguinte formulação:

$$p(h/e) = \frac{p(h) \cdot p(e / h)}{p(e)}$$

em que *h* e *e* representam, respectivamente, a *hipótese* e a *evidência*.

A TC ocupa-se do estudo da relação entre uma teoria empírica e a evidência que a sustenta. Em particular, ela procura desenvolver um aparato formal por meio do qual seja possível representar quantitativamente o grau com que um determinado corpo de evidência contribui para confirmar racionalmente uma dada teoria. Ora, no contexto da TC, o Teorema de Bayes destaca-se por, precisamente, fornecer uma fórmula por meio do emprego da qual é efectivamente possível avaliar comparativamente o modo como diferentes hipóteses científicas concorrentes se relacionam com a evidência disponível.

No seu uso na TC, as diferentes partes do enunciado do Teorema de Bayes devem ler-se da seguinte forma: ‘ $p(h/e)$ ’ deve ler-se como ‘probabilidade posterior da hipótese’ ou ‘probabilidade da hipótese dada a evidência’; ‘ $p(h)$ ’ deve ler-se como ‘probabilidade prévia da hipótese’ ou ‘probabilidade da hipótese anterior à evidência’; ‘ $p(e/h)$ ’ deve ler-se como ‘probabilidade da evidência dada a hipótese’, ou seja, ‘probabilidade de a evidência ser a que é dada a postulação da hipótese’; ‘ $p(e)$ ’ deve ler-se como ‘probabilidade prévia da evidência’ ou ‘probabilidade da evidência independentemente da hipótese’.

Acrescente-se ainda que o conceito de probabilidade usado na TC considerada como “bayesiana”, que é aquela da qual se falará aqui, é o conceito *subjectivo* de

probabilidade, isto é, um conceito que interpreta a noção de probabilidade como referindo o grau de crença que um agente tem numa dada proposição. Esta interpretação do conceito de probabilidade pressupõe assim que os graus de crença que os agentes albergam satisfazem o cálculo matemático das probabilidades. Este pressuposto não é, no entanto, assumido de modo gratuito. Ele deixa-se fundamentar em dois importantes resultados matemáticos. O primeiro é um teorema que demonstra que se as probabilidades subjectivas de um agente forem coerentes, então elas têm que ser conformes ao cálculo de probabilidades, isto é, um teorema que demonstra que a conformidade com os axiomas deste cálculo é *condição necessária* para a coerência subjectiva dos graus de crença de um agente. O segundo é um teorema que demonstra que se as probabilidades subjectivas de um agente forem conformes aos axiomas do cálculo de probabilidades então elas têm que ser coerentes, isto é, um teorema que demonstra que a conformidade com os axiomas do cálculo de probabilidades é *condição suficiente* para a coerência. Da conjunção destes dois teoremas segue-se, obviamente, que a conformidade com os axiomas do cálculo de probabilidades é condição necessária e suficiente para a coerência dos graus de crença de um agente. Deste modo, o pressuposto de que os graus de crença de um agente satisfazem o cálculo matemático das probabilidades mostra-se ser equivalente ao pressuposto de que os agentes são coerentes ou, dito de modo mais tradicional, que eles são racionais.

Intuitivamente, a condição necessária e suficiente para que um dado corpo de evidência contribua para confirmar uma certa hipótese ou teoria é que a sua recolha aumente o nosso grau de crença nessa hipótese ou teoria. Usando a linguagem probabilística, isto é o mesmo que dizer que um dado corpo de evidência e contribui para confirmar uma certa hipótese h se e somente se a verificação de e fizer aumentar a probabilidade de h , ou seja, se $p(h/e) > p(h)$. Por outro lado, e ainda de acordo com uma intuição largamente difundida, é também de esperar que um dado corpo de evidência contribua tanto mais para aumentar o nosso grau de crença numa dada hipótese, quanto mais provável a sua obtenção for dada a verdade da hipótese e quanto mais improvável ou implausível ela for de outra forma. Dito de outro modo, se a obtenção da evidência for, em si mesma, surpreendente mas, ao mesmo tempo, ela for derivável ou expectável da presumível verdade da hipótese ou teoria, então a obtenção dessa evidência deve fazer-nos aumentar consideravelmente a nossa crença na verdade da hipótese ou teoria em causa. Conversamente, se a evidência não for mais provável dada a hipótese ou teoria que está a ser testada do que o seria dada qualquer outra hipótese ou teoria pré-existente, então a observação da evidência em nada contribui para aumentar o grau de crença nessa hipótese ou teoria.

Todas as intuições referidas acima encontram uma expressão matemática directa no Teorema de Bayes. Com efeito, dado o enunciado do mesmo, para que $p(h/e)$ seja maior do que $p(h)$ é aritmeticamente necessário e suficiente que $p(e/h)$ seja maior do que $p(e)$ (evidentemente, desde que $p(h) > 0$; no caso em que $p(h) = 0$, $p(h/e) = p(h)$ quaisquer que sejam os valores de $p(e)$ e de $p(e/h)$; mas como 0 é, no Cálculo das Probabilidades, o valor atribuído à probabilidade da contradição, o facto de nenhuma evidência contribuir para confirmar uma hipótese contraditória satisfaz igualmente a nossa intuição).

Para compreender um pouco melhor o que ficou dito no parágrafo acima, considere-se um caso concreto, o qual é frequentemente usado como exemplo em textos de apresentação dos fundamentos da TC bayesiana. Trata-se do seguinte. Uma das consequências que se deixa derivar da Teoria Geral da Relatividade (TGR), de Einstein,

é a de que, nas vizinhanças do Sol, a trajectória da luz deveria encurvar. Ora, à luz do conhecimento físico anterior, derivado da Física Clássica, de Newton, a constatação da ocorrência de um tal fenómeno constitui algo de extremamente surpreendente. Neste sentido, em 1919, por ocasião de um eclipse do Sol, maximamente visível na região equatorial, foi feita uma observação experimental na ilha do Príncipe onde, com o auxílio de dois potentes telescópios, se tentou determinar se, de facto, um tal fenómeno ocorria ou não. O resultado alcançado foi a constatação que, de facto, o fenómeno previsto pela TGR ocorria. Esta observação experimental teve um grande impacto na comunidade científica da época, a qual considerou, de uma forma geral, que, por meio dela, a TGR tinha recebido uma confirmação empírica extremamente significativa. Repare-se que, antes da efectuação da experiência da ilha do Príncipe, já se sabia que da TGR era possível derivar outras previsões acertadas. Uma delas era, por exemplo, a do movimento das marés. Mas a previsão do movimento das marés não era, à luz do conhecimento físico anterior, algo de surpreendente. Com efeito, a Física Clássica de Newton também prevê o movimento das marés. Neste sentido, ter mostrado que a TGR era capaz de prever o movimento das marés não foi algo que tivesse sido considerado particularmente relevante pela comunidade científica para estabelecer a confirmação empírica da TGR.

Vejamos agora como esta reacção da comunidade científica à experiência de 1919 na ilha do Príncipe pode ser modelada por uma Teoria da Confirmação construída a partir do Teorema de Bayes e de um conceito subjectivo de probabilidade. Começemos por imaginar uma dada atribuição de valores às diferentes probabilidades envolvidas na aplicação do Teorema a este teste empírico da TGR. Assim, suponhamos, apenas por conveniência de exposição, que $p(h)$, isto é, a probabilidade prévia de a TRG ser verdadeira era de, apenas, 0,2 (com este valor pretende-se dar conta da reserva inicial com que a TGR teria sido acolhida por uma parte importante da comunidade científica); que $p(e)$, isto é, a probabilidade de a trajectória da luz encurvar perto do Sol independentemente da validade da TRG era de 0,3 (uma vez que esta consequência se segue dedutivamente da teoria, a sua probabilidade prévia deve ser superior à probabilidade prévia da teoria da qual ela se segue); obviamente, uma vez que a consequência e se segue dedutivamente da hipótese h , $p(e/h)$, isto é, a probabilidade de a trajectória da luz encurvar perto do Sol, caso a TRG seja verdadeira, é de 1.

Dada esta atribuição de valores (largamente arbitrária, é certo) temos então:

$$p(h/e) = \frac{\frac{2}{10} \cdot 1}{\frac{2}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 0} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{2}{2} = 1$$

Quer dizer, de acordo com esta atribuição de valores, o sucesso da experiência da ilha do Príncipe teria permitido, *ceteris paribus*, fazer subir na comunidade científica de 20% para 66,66% a crença racional na verdade da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Como pode observar-se por este pequeno exemplo, o enquadramento e a tradução quantitativa do processo de confirmação oferecido por este formalismo de inspiração bayesiana parece dar, de facto, conta, de um modo bastante aproximado, do modo como a comunidade científica reagiu, de facto, a esta experiência.

2. Medidas Quantitativas da Confirmação, respectivamente, Infirmação de uma Hipótese pela Evidência e da Bondade de uma Explicação.

A partir do resultado anterior, pode obter-se um valor numérico que pode ser usado para medir, de forma quantitativa, o grau de confirmação de uma dada teoria pela evidência. Para esse efeito, basta subtrair a probabilidade prévia da probabilidade posterior, isto é, basta efectuar a operação aritmética:

$$p(h/e) - p(h).$$

No caso do exemplo apresentado acima, o resultado dessa subtracção é $7/15$ ou $0,466$. Ao valor numérico que se obtém com esta subtracção, chamam alguns autores o *incremento da probabilidade*. Assim, o valor do incremento da probabilidade da TGR com a experiência da ilha do Príncipe, dada a atribuição de valores imaginada acima, foi de $0,466$. Este é um incremento de probabilidade bastante considerável.

Repare-se que, se a recolha da evidência tivesse mostrado que a trajectória da luz não encurvava perto do Sol, então a evidência recolhida estaria em contradição com uma das consequências dedutivas da teoria. Assim sendo, o valor de $p(e/h)$ teria que ter sido 0. Nestas condições:

$$p(h/e) = \frac{\frac{2}{10} \cdot 0}{\frac{3}{10}} = \frac{0}{\frac{3}{10}} = 0.$$

Ora, se $p(h/e)=0$, então pode considerar-se que a hipótese foi refutada pela experiência. De modo correspondente, o valor de $p(h/e) - p(h)$ seria um valor negativo. Neste caso, esse valor teria sido de $-0,2$.

Para o caso geral, quando a recolha da evidência faz baixar o valor da probabilidade da hipótese em vez de a fazer aumentar, então o resultado da subtracção é negativo. Neste sentido, a obtenção de qualquer valor superior a 0 na subtracção é a obtenção de um valor que mostra que se obteve uma *confirmação* da hipótese, enquanto que a obtenção de um qualquer valor inferior a 0 é a obtenção de um valor que mostra que se obteve uma *infirmação* da hipótese. E quanto maior for o valor positivo alcançado tanto maior será a confirmação da hipótese pela evidência, enquanto que, quanto menor for o valor negativo alcançado, tanto maior será a infirmação da hipótese pela evidência. Deste modo, e como acabámos de ver, o valor do incremento da probabilidade tanto pode ser positivo como negativo.

Mas o incremento da probabilidade não constitui a única medida quantitativa que pode ser usada para aferir o grau de confirmação ou infirmação de uma hipótese pela evidência. Outra medida à qual se pode igualmente recorrer é a do chamado *factor de probabilidade de uma hipótese*, o qual se deixa representar por meio da expressão ' $\varphi(h)$ '. Este factor define-se do seguinte modo:

$$\varphi(h) = \frac{p(h/e)}{p(h)}.$$

O valor de $\varphi(h)$ é, então, o valor pelo qual a probabilidade prévia da hipótese tem que ser multiplicado para que se possa obter a sua probabilidade posterior. Repare-se que, quando se usa o factor de probabilidade como medida da confirmação de uma teoria pela evidência, a linha divisória que separa a confirmação da infirmação é dada pelo valor 1 e não pelo valor 0, como no caso do incremento da probabilidade. Isto é, só os factores de probabilidade superiores a 1 confirmam, de facto, a hipótese.

Regressando agora ao exemplo apresentado acima, o factor de probabilidade da TGR, dado o sucesso da experiência na ilha do Príncipe, teria sido, dados os valores já introduzidos, o seguinte:

$$\varphi(h) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{10}} = \frac{20}{6} = 3,33.$$

E o factor de probabilidade associado à TGR, dado o insucesso da experiência da ilha do Príncipe, caso esta não tivesse de facto tido sucesso, teria sido 0.

Note-se ainda que, dado o Teorema do Cálculo de Probabilidades abaixo:

$$\frac{p(A/B)}{p(A)} = \frac{p(B/A)}{p(B)},$$

segue-se que:

$$\frac{p(h/e)}{p(h)} = \frac{p(e/h)}{p(e)}$$

Ora, no caso real, em que a experiência da ilha do Príncipe teve, de facto, sucesso, a evidência era uma consequência dedutiva da hipótese. Logo, nessas circunstâncias, $p(e/h)=1$. Por conseguinte,

$$\frac{p(h/e)}{p(h)} = \frac{1}{p(e)}$$

Esta equação mostra que o valor de $\varphi(h)$, ou do factor de probabilidade de h , será, nos casos em que a evidência se deduz da hipótese, tanto maior quanto menor for o valor da probabilidade prévia da evidência. Quer isto dizer que, de acordo com a intuição mencionada acima, é a verificação das consequências empíricas de uma hipótese que, à luz do conhecimento anterior, aparecem como as mais surpreendentes, que mais contribui para a confirmação dessa hipótese.

Um dos epistemólogos que, nos seus escritos teóricos, mais insistiu na relevância desta intuição foi, precisamente, Karl Popper. Acontece, porém, que o tratamento dedutivista da corroboração que ele desenvolveu não contempla a possibilidade de, num procedimento experimental, a evidência recolhida, em vez de se seguir dedutivamente da hipótese, ser antes apenas tornada provável por esta com uma determinada

probabilidade. Todavia, desde que essa probabilidade seja superior à probabilidade prévia da evidência, o factor de probabilidade será superior a 1, e a hipótese será assim confirmada num certo grau ou, para utilizar a terminologia de Popper, parcialmente corroborada pela experiência. E sê-lo-á tanto mais quanto mais improvável se pensasse inicialmente que seria a obtenção de uma tal evidência. Deste modo, o aparato bayesiano aqui apresentado, para além de, nos casos em que esta se aplica, preservar a intuição tão vincadamente salientada por Popper, mostra igualmente que esses são apenas casos especiais de um contínuo de casos relevantes.

Mas não é só o trabalho epistemológico de Popper que ganha em ser encarado pelo prisma de uma TC de inspiração bayesiana. O mesmo acontece com o trabalho de C.S. Peirce em Metodologia. Com efeito, se interpretarmos $p(h)$, como ‘probabilidade da causa’, $p(e)$, como ‘probabilidade do efeito’, $p(h/e)$, como ‘probabilidade da causa, dada a ocorrência do efeito’ e $p(e/h)$, como ‘probabilidade do efeito, dada a ocorrência da causa’, então o Teorema de Bayes pode ser igualmente visto como um modo de formalizar o raciocínio abduativo, tal como ele foi caracterizado por Peirce mais de cem anos depois da morte de Bayes, isto é, como uma retrodução, ou inferência dos efeitos para as causas. Na realidade, e tal como Peirce salientou, uma conclusão abduativa é tanto mais fiável quanto mais surpreendente e difícil de conceber for a ocorrência do efeito observado na ausência da causa cuja ocorrência se pretende estabelecer. Dado que a inferência dos efeitos a partir das causas é habitualmente chamada de ‘explicação’, o resultado do raciocínio abduativo é também com frequência chamado de ‘inferência para a melhor explicação’. Claramente, a fiabilidade de uma conclusão abduativa pode ser medida por meio seja do incremento de probabilidade da hipótese causal a que ela dá origem seja do valor do seu factor de probabilidade. Quer dizer, estas grandezas permitem atribuir um sentido quantitativo preciso ao idioma ‘melhor explicação’ constante da expressão acima. De facto, tal como acabou de se ver, a diferença entre os valores de $p(h/e)$ e $p(h)$ será tanto maior quanto maior for a diferença entre os valores de $p(e/h)$ e $p(e)$. No caso de uma interpretação dedutivista da causalidade, em que $p(e/h)=1$, seja o incremento de probabilidade da hipótese causal seja o seu factor de probabilidade serão, por sua vez, tanto maiores quanto menor for $p(e)$, o que corresponde precisamente à caracterização feita por Peirce do *rationale* do processo abduativo.

3. Teorema de Bayes e Probabilidades Prévias

Uma dificuldade habitual na aplicação do Teorema de Bayes na Teoria da Confirmação (obviamente patente nas atribuições de valores feitas no exemplo acima do teste da TGR na ilha do Príncipe) consiste em que nem sempre é claro como podem as propriedades prévias ser determinadas. E, sem a atribuição de um qualquer valor às probabilidades prévias, não é possível usar o Teorema para determinar a probabilidade posterior da hipótese que se pretende saber se é confirmada ou infirmada pela evidência. A este respeito há, no entanto, que considerar duas situações distintas: a que envolve a determinação da probabilidade prévia da hipótese, ou hipóteses, e a que envolve a determinação da probabilidade prévia da evidência.

Do ponto de vista dos defensores de uma visão subjectivista da probabilidade, a probabilidade prévia da hipótese pode ser uma qualquer. Com efeito, uma vez que as probabilidades de que os subjectivistas falam são probabilidades subjectivas ou

peçoais, o valor da probabilidade prévia da hipótese não representa senão a crença que os agentes têm acerca da fiabilidade da hipótese ou teoria em causa. O facto de essa crença poder estar radicalmente errada não constitui um óbice para os subjectivistas, uma vez que estes defendem que, com a acumulação gradual de informação obtida a partir dos dados empíricos, a probabilidade prévia da hipótese irá sendo calibrada por estes e as probabilidades posteriores que os diferentes agentes envolvidos nos testes empíricos atribuirão à hipótese irão convergindo, independentemente das suas atribuições iniciais de valores à probabilidade prévia da hipótese.

Todavia, no caso da probabilidade prévia da evidência, subsiste a intuição de que a atribuição de um valor que a represente não pode representar apenas uma crença infundada ou um palpite; ela tem de algum modo que ser disciplinada pela experiência. Resta saber é como.

Mas, mesmo antes de sabermos se este problema pode ou não ser resolvido, há que chamar a atenção para o facto de que, num certo número de casos, existe um modo de contorná-lo. Isto é, nestes casos, existe uma forma útil de aplicar o Teorema de Bayes sem que seja necessário encontrar antecipadamente um valor para a probabilidade prévia da evidência. Este modo consiste em, em vez de se utilizar directamente o Teorema para calcular $p(h/e)$, utilizá-lo antes indirectamente para calcular o quociente de $p(h/e)$ por $p(\sim h/e)$, em que $p(\sim h/e)$ representa a probabilidade da hipótese contraditória da hipótese sob investigação dada a evidência. Com efeito, dado o Teorema de Bayes, uma tal divisão assume o seguinte aspecto:

$$\frac{p(h/e)}{p(\sim h/e)} = \frac{\frac{p(h).p(e/h)}{p(e)}}{\frac{p(\sim h).p(e/\sim h)}{p(e)}} = \frac{p(h).p(e/h)}{p(\sim h).p(e/\sim h)}$$

Ora, o que o desenvolvimento desta igualdade nos mostra é que, dada a sua localização nos denominadores tanto do dividendo como do divisor, os valores de $p(e)$ cancelam-se mutuamente. Assim sendo, é possível computar a razão entre $p(h/e)$ e $p(\sim h/e)$ sem ser necessário conhecer quais os valores efectivos de $p(e)$. Para ilustrar como funciona este método considere-se o seguinte problema².

Imaginemos um indivíduo, A , que é fiscal da entidade municipal que tem por missão fiscalizar as casas de jogo da cidade. Certo dia, chegam ao director dessa entidade fiscalizadora denúncias vagas de que estariam a ser usadas, em casas de jogo da cidade, moedas que se encontrariam viciadas para exibirem coroa em 75% dos seus lançamentos ao ar. O director manda então A fazer uma vistoria a todas as casas de jogo da cidade. Ele insiste junto de A que *todas* as casas de jogo devem ser vistoriadas e não apenas aquelas sobre as quais recaíam, dada a experiência anterior, mais suspeitas. Pensando que é mais conveniente despachar os casos previsivelmente mais simples primeiro, A decide então começar as vistorias pela casa de jogo J . Com efeito, J é considerada por A como sendo a mais séria casa de jogo da cidade e, portanto, aquela na qual é menos provável que se detectem quaisquer problemas de viciação dos

² Este problema constitui uma remodelação de um problema semelhante apresentado em Resnik (1987), p. 56. O tratamento original de Resnik contém, porém, um erro de cálculo que compromete tanto o alcance como a compreensão do seu exemplo; na versão que aqui apresento esse erro não ocorre.

mecanismos utilizados. Esta crença de A fundamenta-se no facto de, em todas as vistorias anteriores, o funcionamento dos mecanismos testados em J ter sido sempre irrepreensível e o seu proprietário ser conhecido de A como sendo um indivíduo sério. Quando inicia a vistoria a J , A está, portanto, firmemente convencido que J não é uma das casas onde irá encontrar problemas. No decurso da sua acção de fiscalização, A pega então numa das moedas usadas num dos jogos patrocinados por J e, para a testar, lança a moeda ao ar 10 vezes consecutivas. Inesperadamente, em cada um dos lançamentos, a moeda cai exibindo o lado coroa.

Que expectativa devemos ter quanto à reacção de A à obtenção deste resultado? Por um lado, dada a experiência anterior, sabemos que lhe custa a crer que a casa J esteja a usar moedas viciadas. Por outro lado, ele sabe que a verificação de uma tal sequência de coroas, dada a hipótese de que a moeda não se encontraria viciada, é bastante baixa (é, mais precisamente, de 1 em cada 1024 sequências). Todavia, ela não é tão baixa que não lhe seja possível crer que, naquela ocasião, ele estaria confrontado com uma partida do acaso. Nestas condições, com certeza que o que deveria parecer mais acertado a A seria rever em baixa a sua crença anterior quase total na honestidade de J e iniciar um novo teste. Suponhamos então que o novo teste consiste em lançar 5 vezes ao ar a mesma moeda. E suponhamos também, por uma questão de simplicidade, que o resultado deste segundo teste é novamente o da obtenção de uma sequência de desfechos coroa (neste caso de 5). Não parece difícil imaginar que, nestas condições, A teria que ter concluído que a sua crença inicial na seriedade de J estava errada; ele deveria então tê-la revisto para uma crença que atribuiria com uma probabilidade elevada a J o uso de moedas viciadas; finalmente, ele deveria ter agido em consonância com a nova crença.

Vejam agora como poderíamos modelar o processo psicológico de revisão das suas crenças que A teria atravessado nestas circunstâncias. Como ficou dito acima, para poder aplicar o Teorema de Bayes nesta situação, é necessário determinar previamente as probabilidades categóricas relevantes e a probabilidade condicional contrária. Começando pela probabilidade prévia da hipótese, isto é, $p(h)$: qual é a probabilidade prévia de que a moeda esteja viciada? Se A soubesse antecipadamente que, por exemplo, 50% das moedas usadas na casa de jogo J estavam viciadas e que a moeda testada tinha sido seleccionada ao acaso de entre as moedas efectivamente nela usadas, então seria razoável considerar que a probabilidade prévia que ele teria implicitamente atribuído à hipótese de a moeda estar viciada seria de 0,5. Todavia, essa é uma informação que sabemos que A não possuía. Como proceder então?

Suponhamos que, dada a sua confiança anterior na seriedade do proprietário de J , dado o facto de nenhuma inspecção até então feita ter detectado qualquer irregularidade em J , e dada a sua crença no princípio de que todos devem ser presumidos inocentes até prova em contrário, antes de efectuar o teste com a moeda que encontrou em J , o grau de crença de A na hipótese de que essa moeda seria uma das moedas viciadas constantes da denúncia poderia ser representado pelo valor de 0,01 e que o grau da sua crença na hipótese de que a moeda escolhida não se encontraria viciada poderia ser representado pelo valor 0,99.

E quanto às probabilidades condicionais contrárias, i.e., $p(e/h)$ e $p(e/\sim h)$? Bom, como cada lançamento é independente dos outros lançamentos, a probabilidade de ocorrer uma sequência de 10 desfechos coroa consecutivos, dada cada uma das hipóteses (chamemos-lhes V e $\sim V$), é a seguinte:

$$p(10 \text{ coroas consecutivas/hipótese } V) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0,0563 = 5,6\%$$

$$p(10 \text{ coroas consecutivas/hipótese } \sim V) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0,000976 = 0,0976\%$$

Finalmente, para podermos prosseguir no sentido de calcular $p(h/e)$ e $p(\sim h/e)$ por meio da aplicação do Teorema de Bayes, necessitaríamos de introduzir um valor para representar a probabilidade prévia da ocorrência de uma sequência de 10 desfechos consecutivos (i.e., $p(e)$). Só que, por hipótese, A não faria qualquer ideia a esse respeito. O que, por sua vez, implica que não poderíamos atribuir um qualquer valor a uma tal probabilidade prévia da evidência.

Todavia, isso não significa que não teria sido possível modelar o processo de raciocínio de A . De facto, nós podemos fazê-lo adoptando um processo que prescinde da inclusão no modelo de quaisquer valores para as probabilidades prévias da evidência. Este processo consiste em, como vimos acima, calcular o quociente que resulta da divisão de $p(h/e)$ por $p(\sim h/e)$. Assim, para o nosso caso concreto, e fazendo as substituições apropriadas, obtemos:

$$\frac{p(h/e)}{p(\sim h/e)} = \frac{0,01 \cdot 0,0563}{0,99 \cdot 0,000976} = \frac{0,000563}{0,00096624} = 0,58267$$

Que nos mostra a obtenção deste resultado aritmético?

Como 0,01 é um valor 99 vezes menor que 0,99, ele mostra-nos que a probabilidade que A atribuiu à possibilidade de a moeda estar viciada subiu de um valor 99 vezes menor que o valor que ele atribuiu à possibilidade de a mesma moeda não estar viciada para um valor apenas 1,7 vezes menor (ou seja, para um valor que é 58,2% do valor atribuído à hipótese de que a moeda não se encontraria viciada). Isto aconteceu porque a probabilidade prévia de 99 contra 1 a favor de $\sim V$ foi calibrada pela constatação de que o valor obtido para $p(e/h)$ era cerca de 57 vezes e meia superior ao valor obtido para $p(e/\sim h)$. Deste modo, apesar de não termos computado a probabilidade efectiva que A atribuiria à hipótese de que a moeda se encontraria viciada dada a evidência, não deixámos de computar o modo como o seu valor evoluiu *relativamente* ao modo como evoluiu o valor da hipótese rival após a integração no modelo dos resultados experimentais. Nesse sentido, não deixámos de dar conta de um modo quantitativo preciso do modo como, após a realização do teste, A teria modificado a relação entre os seus graus de crença em cada uma das hipóteses rivais.

4. Versão alargada do Teorema de Bayes, Condicionização, Actualização e Convergência

Como afirmámos ao concluir a secção anterior, é natural supor que os agentes modificam os seus graus de crença (i.e., as probabilidades subjectivas que atribuem às diferentes hipóteses que consideram) à luz da obtenção de novos dados. À regra para operar essa modificação costuma chamar-se regra da *condicionização*. Esta regra

codifica um procedimento que consiste em tomar como novas probabilidades prévias as probabilidades posteriores alcançadas em aplicações anteriores do Teorema de Bayes.

Mas, para poder aplicar esta regra, defrontamo-nos com o problema de determinar que valor deve ser atribuído à probabilidade prévia da evidência. Na secção anterior ficámos em dívida para com o leitor, na medida em que sugerimos que poderia ser encontrada uma resolução para este problema, mas não a apresentámos. Chegou agora a altura de pagar essa dívida.

Na realidade, o conceito ‘probabilidade prévia da evidência’ pode ser reinterpretado como a probabilidade da evidência considerada à luz das diferentes hipóteses possíveis. À versão do Teorema de Bayes na qual a probabilidade prévia da evidência é reinterpretada desta forma, chama-se a versão *alargada* do Teorema. Esta mostra que a probabilidade da evidência pode ser calculada como uma soma de produtos, em que cada produto consiste na multiplicação da probabilidade de cada uma das hipóteses pela probabilidade da evidência, dada essa hipótese. O seu enunciado é o seguinte:

$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B / A_i)}{\sum_{j=1}^n p(A_j) \cdot p(B / A_j)}$$

Armados agora deste novo conhecimento, regressemos ao fiscal *A*. Vejamos, então, como podemos calcular, em função dos dados do problema, os valores absolutos de $p(h/e)$ e de $p(\sim h/e)$ e não apenas a relação entre eles. Para o caso em que a hipótese era a de a moeda não estar viciada e a evidência era a de esta moeda ter caído com a face coroa virada para cima numa sequência de 10 desfechos consecutivos em outros tantos lançamentos ao ar, e fazendo as substituições apropriadas, a expressão que obtemos é a seguinte:

$$p(h/e) = \frac{0,99 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left[0,99 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right] + \left[0,01 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right]} = \frac{0,000966}{0,000966 + 0,000563} = \frac{0,000966}{0,001529} = 0,63.$$

Portanto, a probabilidade prévia inicial de 0,99 que, de acordo com a nossa atribuição, *A* teria concedido à hipótese de que a moeda não se encontraria viciada deveria, após a experiência, ter sido condicionalizada para uma probabilidade posterior de 0,63. É fácil de verificar que 0,63 é um valor precisamente 1,7 vezes superior ao valor que necessariamente teria de se atribuir à probabilidade da hipótese contraditória, i.e., 0,37. Por outras palavras, 0,37 é 58% de 0,63. O valor assim obtido da probabilidade da hipótese é já um valor consideravelmente menor que o valor inicial de 0,99.

Como dissemos acima, é fácil de imaginar que *A* não poderia ter-se dado por satisfeito só com a realização deste teste. Supusemos por isso que, em função do resultado obtido no primeiro teste, ele teria decidido empreender um segundo teste. Vamos então supor que, neste segundo teste, o valor 0,63 representaria o grau de crença de *A* na hipótese de que a moeda não se encontraria viciada, constituindo, por isso, a nova probabilidade prévia que ele concederia a essa hipótese. A nossa expectativa a seu respeito seria então

a de que, com a realização do novo teste, e o tratamento subsequente dos novos dados, A iria aproximar ainda mais o valor da probabilidade atribuído à hipótese daquele que, em princípio, estaria de acordo com a situação objectiva por ela descrita.

A nossa suposição foi então a de que A decidiu fazer um novo teste com a moeda em causa lançando-a ao ar mais 5 vezes e que, nesses 5 lançamentos, ela teria voltado a exhibir a face coroa em todos eles. Agora, de acordo com a nossa atribuição, A teria concedido os valores 0,63 e 0,37 a $p(\sim h)$ e a $p(h)$, respectivamente. Deste modo, o cálculo do quociente que se obtém com a divisão de $p(h/e)$ por $p(\sim h/e)$, de acordo com a expressão apresentada mais acima, isto é, de acordo com:

$$\frac{p(h/e)}{p(\sim h/e)} = \frac{\frac{p(h).p(e/h)}{p(e)}}{\frac{p(\sim h).p(e/\sim h)}{p(e)}} = \frac{p(h).p(e/h)}{p(\sim h).p(e/\sim h)}$$

produz, de acordo com as substituições apropriadas, o seguinte resultado:

$$\frac{p(h/e)}{p(\sim h/e)} = \frac{0,37.0,237}{0,63.0,031} = \frac{0,08769}{0,011953} = 7,336.$$

Como vimos, em função da sua primeira experiência, A teria actualizado o seu palpite inicial de 99 contra 1 a favor da hipótese de que não haveria viciação de moedas naquela casa de jogo para 1,7 contra 1. Submetida esta nova hipótese a nova verificação experimental, supomos que A substituiu este seu palpite por uma hipótese de 1 contra 7,336 a favor da hipótese contrária de que a casa de jogo em questão estaria, de facto, a usar pelo menos uma moeda viciada.

Esta relação de 7,336 contra 1 a favor de $p(h)$ pode ser confirmada pelo cálculo de $p(h/e)$ de acordo com a versão geral do Teorema de Bayes acima apresentada, na qual são introduzidas como probabilidades iniciais das hipóteses em confronto os valores 0,63 e 0,37. Neste caso, obteremos o seguinte resultado:

$$p(h/e) = \frac{0,37 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5}{\left[0,63 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right] + \left[0,37 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5\right]} = \frac{0,08769}{0,099643} = 0,88$$

Portanto, as novas probabilidades prévias de 0,63 e 0,37, atribuídas, respectivamente, à hipótese de que a moeda não se encontraria viciada e à hipótese contraditória de que a moeda se encontraria viciada foram assim, após esta nova experiência, condicionalizadas para as novas probabilidades posteriores de 0,12 e de 0,88. É fácil de verificar que 0,88 é um valor precisamente 7,336 vezes superior ao valor que vem atribuído para a nova probabilidade posterior da hipótese contraditória, i.e., ao valor que se obtém com a subtracção $1 - 0,88$, ou seja, 0,12.

Após a realização deste segundo teste, *A* deveria então ter actualizado a probabilidade que atribuiu à hipótese de que a casa de jogo *J* estaria a utilizar pelo menos uma moeda viciada numa das suas mesas de jogo para o valor de 0,88 ou 88%. Evidentemente, uma probabilidade posterior de 88% constitui já uma base bastante forte para o desenvolvimento de uma atitude punitiva que não reconhece seriedade à casa de jogo *J*. A suposição feita nesta pequena história é, precisamente, a de que, após este segundo teste, *A* teria agido em consonância com uma tal convicção, suportada, por sua vez, por um grau de crença semelhante a este na hipótese de que estariam a ser usadas moedas viciadas em *J*.

A consideração desta pequena história mostra-nos, portanto, que a modificação progressiva das probabilidades prévias que, de acordo com o modelo, *A* atribuiu à hipótese, à medida que os resultados da experiência foram sendo integrados no seu processo de raciocínio, permitiu a obtenção de uma probabilidade posterior mais próxima dos resultados da observação experimental. Para o caso geral, então, por muito inaceitavelmente fantasiosas ou parciais que as probabilidades iniciais dos agentes sejam, a acumulação de experiência, e a condicionalização das probabilidades iniciais por meio desta, fará com que as estimativas de probabilidade dos agentes converjam para probabilidades posteriores mais ou menos coincidentes e razoáveis, as quais ficarão, por sua vez, cada vez mais próximas da probabilidade objectiva, caso ela exista ou seja de todo passível de ser determinada.

5. Conclusão: Confirmação e Racionalidade

Deste modo, pode tanto sustentar-se o ponto de vista de acordo com o qual uma TC desenvolvida em moldes bayesianos dá conta, de um modo quantificado rigorosamente, do processo epistémico por meio do qual a comunidade científica confirma ou infirma uma teoria empírica em função da evidência obtida, como pode também sustentar-se o ponto de vista de acordo com o qual uma tal teoria dá conta, de um modo quantificado rigorosamente, do processo psicológico por meio do qual os agentes individuais aprendem com a experiência do dia a dia e convergem nas suas crenças, a maioria das quais constitui, precisamente, a rede de conhecimentos práticos acerca do mundo que é largamente partilhada por todos nós.

Evidentemente, este segundo ponto de vista, defendido, entre outros, por Davidson e Jeffrey, apoia-se sobre o pressuposto de que os agentes individuais são racionais, ou melhor, coerentes, no sentido preciso de coerência definido pelos axiomas da teoria. Isto quer dizer que, para estes autores, a “arte da conjectura” é muito mais do que “o objecto da sabedoria do filósofo e da prudência do homem de estado”, como a caracterizou Bernoulli. Ela tem também um significado psicológico essencial. Este é, todavia, um pressuposto empírico muito substantivo. A sua validade necessita por isso de ser seriamente discutida. Esta discussão constitui, porém, tema para um outro ensaio.

António Zilhão
Universidade de Lisboa
AntonioZilhao@fl.ul.pt

BIBLIOGRAFIA:

- Davidson, D., "Toward a Unified Theory of Meaning, and Action" in *Grazer Philosophische Studien*, 11, pp. 1-12, 1980.
- Hacking, I., *An Introduction to Probability and Inductive Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- Haller, R., *Studien zur österreichischen Philosophie – Variationen über ein Thema*. Amsterdam: Rodopi, 1979.
- Haller, R., *Fragen zu Wittgenstein und Aufsätze zur Österreichischen Philosophie*. Amsterdam: Rodopi, 1986.
- Jeffrey, R., *The Logic of Decision*. Chicago: The University of Chicago Press, 1965.
- Jeffrey, R., *Probability and the Art of Judgment*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- Jeffrey, R., *Depois do Empirismo Lógico/After Logical Empiricism*, edição bilingue, tradução portuguesa e introdução de António Zilhão. Lisboa: Colibri, 2002.
- Jeffrey, R., *Subjective Probability: The Real Thing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- Papineau, D., "Methodology" in Grayling (ed.), *Philosophy – a guide through the subject* – vol. I. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- Papineau, D., *The Roots of Reason – Philosophical Essays on Rationality, Evolution, and Probability*. Oxford: Clarendon Press, 2003.
- Peirce, C.S., *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. 1-6, Hawthorne, C. & Weiss, P. (eds.) 1931-35; vols. 7-8, Burks, A.W. (ed.) 1958. Cambridge (MA): Harvard University Press.
- Popper, K., *Logik der Forschung*. Wien: 1935. Reeditado em versão inglesa, com um novo Prefácio, em 1959 como *The Logic of Scientific Discovery*. London: Hutchinson.
- Ramsey, F. P., "Truth and Probability" in *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. London: Routledge & Kegan Paul, 1931.
- Resnik, M.D., *Choices – An Introduction to Decision Theory*. Minneapolis (MN): University of Minnesota Press, 1987.
- Savage, L.J., *The Foundations of Statistics*. New York (NY): Wiley & Sons, 1954.
- Skyrms, B., *Choice & Chance. An Introduction to Inductive Logic*. Belmont (CA): Wadsworth/Thomson Learning, 2000 (4th edition).